

Maths 2.1 : Graphes

25 Avril 2023

1 Instructions

- Le contrôle dure 2h.
- Vous n'avez le droit qu'à vos notes manuscrites (cours, TD).
- Toute communication est évidemment interdite.
- Les exercices peuvent être faits dans n'importe quel ordre.
- Justifiez vos réponses.
- Lisez bien les questions. Ne perdez pas bêtement des points.

2 Exercices

Exercice 1. Matrice d'adjacence (4 points).

1) Dessinez le graphe G de sommets $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ associé à la matrice d'adjacence suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) S'agit-il d'un graphe orienté ? Justifiez.
- 3) Donnez le diamètre du graphe.
- 4) Le graphe G est-il eulérien ? Justifiez.
- 5) Est-il hamiltonien ? Justifiez.

Exercice 2. Pandemic (6 points).

Pandemic est un jeu de société où notamment les joueurs doivent se déplacer sur une carte du monde. Le document ci-dessous montre une partie de la carte.



- 1) En utilisant un algorithme de parcours de graphes, calculez les distances des différentes villes présentes sur cette carte par rapport au pion Orange se trouvant à Karachi.
- 2) On ajoute maintenant les règles suivantes :
 - Les trajets coûtent normalement 1.
 - Les trajets coûtent +1 par cube présent sur la case d'arrivée.
 - Les trajets coûtent -1 s'ils partent d'un Centre de soin (Bâtiment blanc).

Construisez le graphe valué associé.

- 3) En appliquant l'algorithme de Dijkstra, calculez les distances selon ces nouvelles règles, ainsi que les chemins permettant de les réaliser.
- 4) En oubliant le pion Orange, donnez finalement un arbre couvrant minimal.

Exercice 3. Zoo (4 points).

Un zoo va bientôt recevoir de nouveaux animaux. Le gardien doit tout d'abord construire des enclos pour les accueillir. Afin de construire le moins d'enclos possible, il souhaite regrouper les animaux dans des enclos communs. Néanmoins, il doit suivre les contraintes suivantes :

- Le Lynx ne peut côtoyer ni le Panda roux, ni le Tigre, ni le Capucin.
- Le Panda Roux ne peut être avec le Bison.
- Le Tigre doit éviter le Capucin, le Bison et le Wallaby.
- Le Capucin et le Wallaby doivent être séparés du Mamba.
- Le Hibou ne doit pas vivre avec le Mamba ni le Bison.

- 1) Représentez les contraintes du gardien dans un graphe G où les sommets sont les animaux.
- 2) Appliquez l'algorithme de Welsh-Powell sur ce graphe.
- 3) Donnez en justifiant le nombre minimal d'enclos que le gardien doit construire.

Exercice 4. Manifestation (5 points).

Les manifestants de Paris veulent se rendre de Opéra (O) à Place de la Nation (N). Pour cela, ils peuvent passer par différents endroits célèbres. Cependant, les itinéraires possibles ont été limités par la préfecture, qui a imposé des capacités maximales aux rues reliant ces points. Ces limitations sont récapitulées dans le tableau ci-dessous (en 100 000/h) :

→	O	P	Mo	G	L	C	Ma	B	R	N
O	7	2	-	-	-	-	-	-	-	-
P	-	-	-	-	8	-	-	-	-	-
Mo	-	-	-	1	-	-	5	-	-	-
G	-	-	-	-	-	-	1	-	4	-
L	-	-	-	-	-	6	-	3	-	-
C	-	-	3	1	-	-	-	6	4	-
Ma	-	-	-	-	-	7	-	2	5	-
B	-	-	-	-	-	-	-	-	1	9
R	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Les initiales désignant les places suivantes :

- Place de l'Opéra,
- Pyramide,
- Montmartre,
- Gare du Nord,
- Le Louvres,
- Place du Châtelet,
- Le Marais,
- Place de la Bastille,
- Place de la République,
- Place de la Nation.

- 1) Représentez les possibilités de parcours par un graphe de Flux.
- 2) Calculez le nombre maximal de manifestant pouvant défiler dans Paris, ainsi qu'une répartition possible.
- 3) Donnez une coupe minimale du graphe.

Exercice 5. Parcours (4 points).

Dans cet exercice, on attend de vous des preuves mathématiques claires et précises. Soit G un graphe à n sommets, et soient x et y deux sommets de G .

- 1) Prouvez que s'il existe un parcours de x à y alors il en existe un de longueur $\leq n$.
- 2) Prouvez que s'il existe un parcours de x à y de longueur $> n$ alors il en existe une infinité.