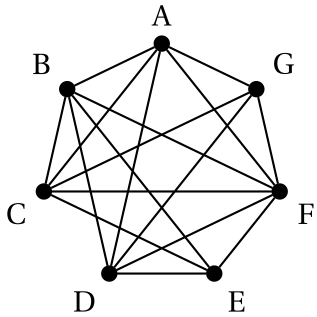
TD nº 1 : Généralités

Exercice nº 1. Combien y a-t-il d'arêtes dans le graphe ci-dessous ?



Conseil : ne pas compter les arêtes mais utiliser une propriété du cours…

Exercice nº 2. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes des graphes suivants ?

C_n P_n S_n W_n K_n $K_{n,p}$

Exercice nº 3. On souhaite démontrer la propriété suivante.

« Dans une assemblée d'un nombre quelconque de personnes, il y a toujours au moins deux personnes qui connaissent le même nombre de personnes. »

On admet que l'action de se connaître est réciproque.
On note n le nombre de personnes de l'assemblée, puis on modélise la situation par un graphe.

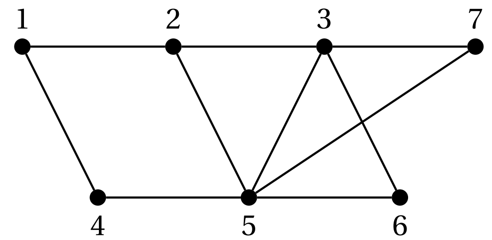
1. Indiquer ce que représentent les sommets et les arêtes du graphe. Quel est son ordre ? Est-il orienté ?
2. Dans cette question, on s'intéresse au cas $n = 3$. Tracer tous les graphes possibles et vérifier que la propriété est vraie.
3. Soit n quelconque. On raisonne par l'absurde.
   Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, puis à aboutir de manière logique à une contradiction, ce qui prouve que la supposition était fausse, et donc que la propriété est vraie.
   a. Quelle est ici la supposition ?
   b. Comment cela se traduit-il sur les degrés des sommets ?
   c. Dans un graphe d'ordre n, quelles sont les valeurs possibles des degrés ? Combien cela fait-il de valeurs différentes ?
   d. En reliant les questions **b.** et **c.**, aboutir à une contradiction. Conclure.

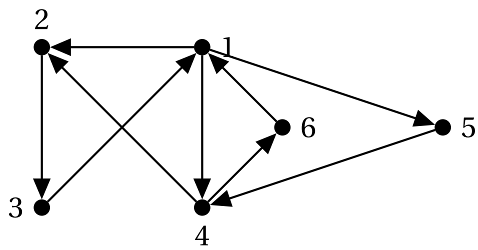
Exercice nº 4. Donner un exemple (s'il en existe un) de chacun des graphes suivants :

1. un graphe biparti complet et 5-régulier ;
2. un graphe 4-régulier autre que K_5 et $K_{4,4}$;
3. un graphe complet qui est une roue.

Exercice nº 5.

1. Donner les matrices d'adjacence des graphes suivants.





   Qu'a de particulier la matrice du premier graphe ?

2. Représenter les graphes dont voici les matrices d'adjacence.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit G un graphe d'ordre n, et M sa matrice d'adjacence. Que représente les nombres suivants :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} \qquad \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}$$

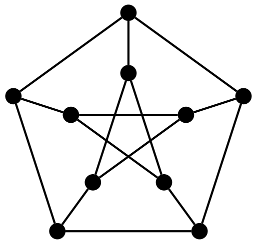
   (on distinguera les cas orienté et non orienté).

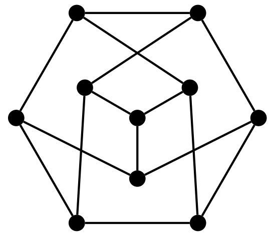
Exercice nº 6. Construire un graphe orienté d'ordre 6 qui vérifie les conditions suivantes.

x	1	2	3	4	5	6
$d^+(x)$	1	3	2	0	0	1
$d^-(x)$	0	3	2	0	0	2

Exercice n° 7.

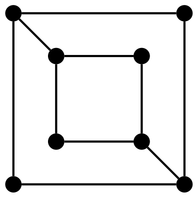
1. Vérifier que les deux graphes ci-dessous sont isomorphes en étiquetant correctement leurs sommets. C'est le **graphe de Petersen**.

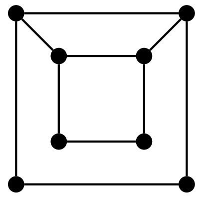




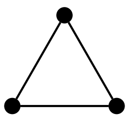
Ce graphe est-il régulier ? En déduire rapidement son nombre d'arêtes.

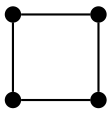
2. Expliquer pourquoi les deux graphes ci-dessous ne peuvent pas être isomorphes.

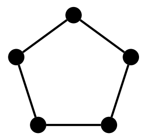


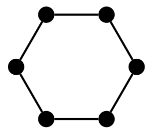


Exercice n° 8. Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont des sous-graphes du graphe de Petersen ?









Exercice n° 9. Soit G = (V,E) un graphe ayant n sommets et m arêtes. On considère un sommet $x \in V$ de degré k et une arête $e \in E$.
Combien de sommets et d'arêtes ont les graphes suivants :

1. sous-graphe partiel en retirant e ;
2. sous-graphe induit en retirant x.

Exercice n° 10.

1. Prouver que $K_{2,p}$ est planaire pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit G = (V,E) le graphe défini par

$$V = \{2,3,5,6,10,15\} \qquad \text{et} \qquad E = \big\{\{x,y\} \subset V \;\mid\; x \mid y \vee y \mid x\big\}.$$

Prouver que G est planaire.
