TD n° 2 : Chemins et connexité

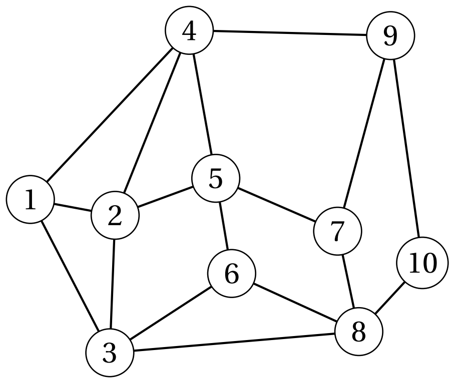
Exercice n° 1. Pour chacun des graphes suivants :

P_n C_n S_n W_n K_n $K_{n,p}$

1. déterminer le diamètre ;
2. est-il (semi-)eulérien ?
3. est-il (semi-)hamiltonien ?

Exercice n° 2. Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.

La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.



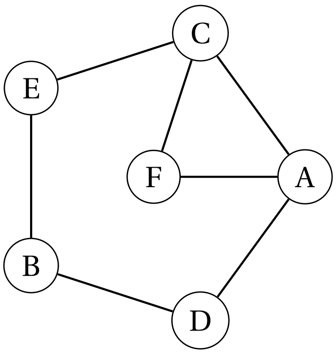
1. Donner un itinéraire allant du sommet 1 au sommet 10 passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant du sommet 1 au sommet 10 utilisant tous les sentiers une seule fois ? Justifier votre réponse.
3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-contre M^5.
   a. Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
   b. Déterminer le nombre d'itinéraires allant du sommet 1 au sommet 10 empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le sommet 5.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

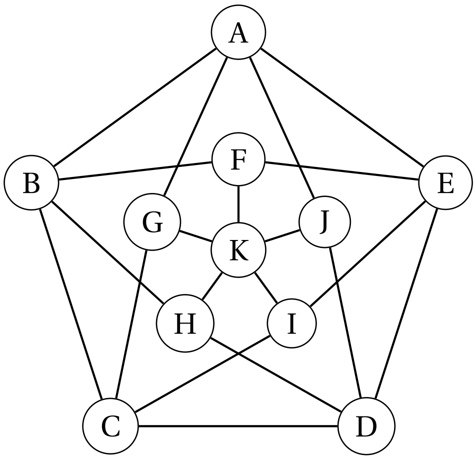
Exercice n° 3. Est-il possible de passer une seule fois par toutes les cases d'un échiquier 4×4 avec un cavalier ? 4×3 ?

Exercice n° 4.

1. Le graphe suivant vérifie-t-il les conditions du théorème de Dirac ? d'Ore ? Est-il hamiltonien ?



2. Vérifier que le graphe de Grötzsch est hamiltonien.

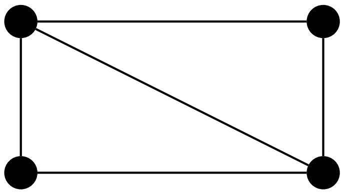


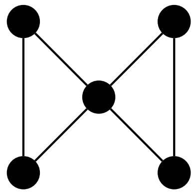
Exercice n° 5. Dessiner le graphe associé à la matrice d'adjacence suivante, puis déterminer ses composantes fortement connexes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6. Dessiner tous les arbres à 3, 4 et 5 sommets.

Exercice n° 7. Dessiner tous les arbres recouvrants des graphes ci-dessous.





Exercice n° 8. Soit G = (V,E) un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré au moins 2.

1. Prouver que $|E| \geqslant |V|$.

2. G peut-il être un arbre ?

3. En déduire que G possède un cycle.

Exercice n° 9. On considère un pays de 101 villes et ses liaisons aériennes.
La capitale est reliée aux 100 autres villes.
Chaque autre ville, hormis la capitale, propose 10 liaisons aériennes.
On peut se rendre d'une ville quelconque à n'importe quelle autre, quitte à transiter.
On veut prouver que l'on peut fermer au moins la moitié des liaisons avec la capitale tout en gardant le fait de pouvoir se rendre d'une ville à une autre.

1. Modéliser la situation par un graphe G = (V,E) en précisant ce que représentent les sommets et les arêtes.

2. Comment se traduisent chacune des quatre premières phrases ?

3. On considère le sous-graphe G' induit par la suppression de la capitale.

  a. Travaillons dans une composante connexe de G'. Quels degrés trouvent-on ?

  b. Rappeler pourquoi, dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.

  c. En déduire le nombre maximum de composantes connexes.

  d. Conclure.
