# Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

15 octobre 2021

IUT de Fontainebleau

Partie 4

# Fonctions

# Fonctions, applications

# Fonctions, applications

## Définitions

# Notion de fonction

## Fonction

Une fonction $f : E \to F$ (de $E$ dans $F$) est une relation de $f \subset E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$, on note $y = f(x)$ plutôt que $xfy$. Attention, $f^{-1}$ (en tant que relation) n'est pas nécessairement une fonction.

**Exemple 1**

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

On définit la fonction $f$ en extension

$$f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

Autrement dit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & 1 & \longmapsto & a \\ & & 2 & \longmapsto & c \\ & & 4 & \longmapsto & a \end{array}$$

$f^{-1}$ est-elle une fonction ?

**Exemple 2**

$h = \{(1, a), (1, c), (4, a)\} \subset E \times F$ n'est pas une fonction. Pourquoi ?

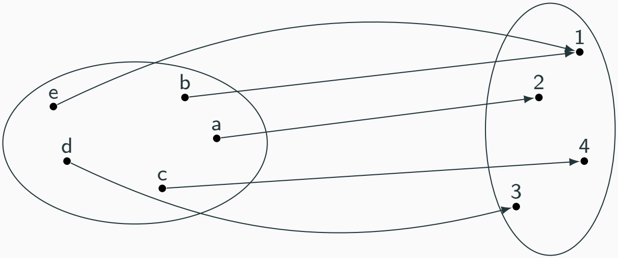
- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | ␀ | (nul) | 016 | ► | (dle) | 032 | ␣ | 048 | 0 | 064 | @ | 080 | P | 096 | ‘ | 112 | p |
| 001 | ☺ | (soh) | 017 | ◄ | (dc1) | 033 | ! | 049 | 1 | 065 | A | 081 | Q | 097 | a | 113 | q |
| 002 | ☻ | (stx) | 018 | ↕ | (dc2) | 034 | " | 050 | 2 | 066 | B | 082 | R | 098 | b | 114 | r |
| 003 | ♥ | (etx) | 019 | ‼ | (dc3) | 035 | # | 051 | 3 | 067 | C | 083 | S | 099 | c | 115 | s |
| 004 | ♦ | (eot) | 020 | ¶ | (dc4) | 036 | $ | 052 | 4 | 068 | D | 084 | T | 100 | d | 116 | t |
| 005 | ♣ | (enq) | 021 | § | (nak) | 037 | % | 053 | 5 | 069 | E | 085 | U | 101 | e | 117 | u |
| 006 | ♠ | (ack) | 022 | ▬ | (syn) | 038 | & | 054 | 6 | 070 | F | 086 | V | 102 | f | 118 | v |
| 007 | • | (bel) | 023 | ↨ | (etb) | 039 | ' | 055 | 7 | 071 | G | 087 | W | 103 | g | 119 | w |
| 008 | ◘ | (bs) | 024 | ↑ | (can) | 040 | ( | 056 | 8 | 072 | H | 088 | X | 104 | h | 120 | x |
| 009 | | (tab) | 025 | ↓ | (em) | 041 | ) | 057 | 9 | 073 | I | 089 | Y | 105 | i | 121 | y |
| 010 | ◙ | (lf) | 026 | | (eof) | 042 | * | 058 | : | 074 | J | 090 | Z | 106 | j | 122 | z |
| 011 | ♂ | (vt) | 027 | ← | (esc) | 043 | + | 059 | ; | 075 | K | 091 | [ | 107 | k | 123 | { |
| 012 | | (np) | 028 | └ | (fs) | 044 | ’ | 060 | < | 076 | L | 092 | \ | 108 | l | 124 | \| |
| 013 | ♪ | (cr) | 029 | ↔ | (gs) | 045 | - | 061 | = | 077 | M | 093 | ] | 109 | m | 125 | } |
| 014 | ♬ | (so) | 030 | ▲ | (rs) | 046 | . | 062 | > | 078 | N | 094 | ^ | 110 | n | 126 | ~ |
| 015 | ☼ | (si) | 031 | ▼ | (us) | 047 | / | 063 | ? | 079 | O | 095 | _ | 111 | o | 127 | ⌂ |

**Table 1:** Table ascii

# Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme



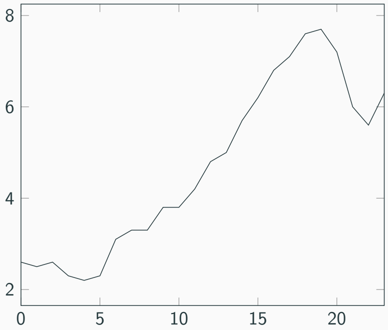
# Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

# Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme



# Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

**Algorithm 1** Algorithme d'Euclide

**procedure** Euclide($a$, $b$)
    **while** $b \neq 0$ **do** ▷ We have the answer if b is 0
        $r \leftarrow a \bmod b$
        $a \leftarrow b$
        $b \leftarrow r$
    **end while**
    **return** $a$ ▷ The gcd is a
**end procedure**

# Fonctions, applications

## Vocabulaires

# Ensemble image

**Ensemble image**

Soit $f : E \to F$ une fonction de $E$ dans $F$.

- Image $f(x)$ est l'image de $x$
- Ensemble image de $A \subset E$ : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A,\ f(x) = y\}$
- Ensemble image de $f$ : $\mathrm{Im}(f) = f(E)$

**Exemple :**

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ défini par

$$f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

On a :

$f(\{1\}) = \{a\}$ $\quad$ $f(\{1, 4\}) = \{a\}$ $\quad$ $f(\{3\}) = \emptyset$ $\quad$ $f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{a, c\}$

# Préimage/image récirpoque

**Préimage(image réciproque)**

Soit $f : E \to F$ une fonction de $E$ dans $F$.

- Antécédent : $x$ est un antécedent de $y$ si $y = f(x)$
- Préimage de $B \subset F$ $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$
- Domaine de définition de $f$ : $Dom(f) = f^{-1}(F)$

**Exemple :**

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ défini par

$$f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

On a :

$$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 4\} \qquad f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 4\} \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \qquad Dom(f) = \{1, 2, 4\}$$

# Fonctions, applications

## Applications

**Application**

Une fonction $f : E \to F$ est une application si $Dom(f) = E$. On note

$$F^E$$

l'ensemble des fonctions de $E \to F$.

**Exemple :** Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

- $\{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$ définit une fonction de $E$ dans $F$ mais pas une application.
- $\{(1, a), (2, c), (3, b), (4, a)\} \subset E \times F$ définit une fonction de $E$ dans $F$ qui est aussi une application.

Remarque : on emploie souvent fonction pour application.

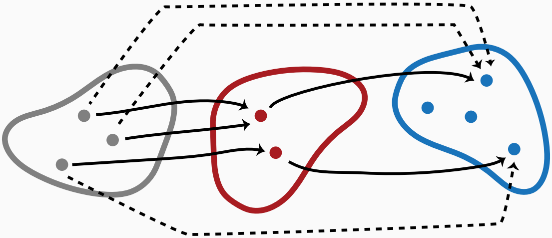
**Composition**

La fonction composée de $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est la relation

$$g \circ f$$

C'est bien encore une fonction

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}$$



**Propriétés**

- En général $f \circ g \neq g \circ f$.
- Associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

# Injections

## Application injective

$f : E \to F$ application est injective si tout $y \in F$ admet au plus un antécédent.

**Autrement dit :** $\forall x_1, x_2 \in E$ on a $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

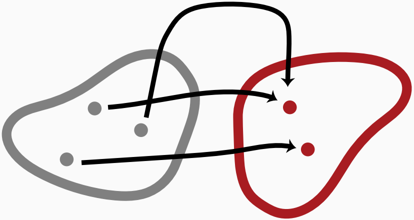
**Exemple :** Code ASCII, Code INSEE...

# Surjections

**Application surjective**

$f : E \to F$ application est surjective si tout $y \in F$ admet au moins un antécédent.

**Autrement dit :** $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$.

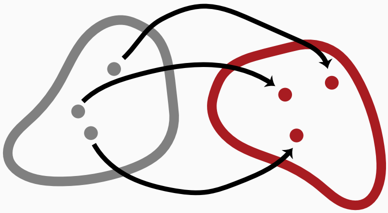


# Bijections

**Application bijective**

$f : E \to F$ application est bijective si tout $y \in F$ admet exactement un antécédent.

**Autrement dit :** $f$ est une application injective et surjective.



# Bijections

**Application réciproque**

L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Si $f$ est bijective, l'application $g$ est unique, c'est l'application réciproque de l'application $f$, notée $f^{-1}$.

C'est l'application obtenue en inversant le "sens des flèches".

**Composée de deux bijections**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. La composée $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

# Fonctions, applications

## Quelques classes importantes de fonctions

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble, une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Etant donnée une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on note souvent $u_n$ le $n^{\text{ième}}$ élément de la suite et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### Fonctions caractéristiques

Soient $A \subseteq \Omega$ on définit la fonction caractéristique de l'ensemble $A$ par

$$\begin{array}{rccl} 1_A: & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

### Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, pour tout $x \in \Omega$, on a :

- $1_{A\cap B}(x) = 1_A(x) \times 1_B(x)$
- $1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A\cap B}(x)$
- $1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$