

Maths 1.1 : Mathématiques discrètes

7 Novembre 2023

Instructions

- Le contrôle dure 1h30.
- Vous avez le droit à une feuille A4 manuscrite.
- Toute communication est évidemment interdite.
- Calculatrice et téléphone interdits.
- Les exercices peuvent être faits dans n'importe quel ordre.
- Justifiez vos réponses.
- Lisez bien les questions. Ne perdez pas bêtement des points.

Exercices

Exercice 1. Tableau de Karnaugh (3 points).

Voici un tableau de Karnaugh d'une forme propositionnelle φ (disposition $ab\backslash cd$) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| × | × | | |
| × | × | × | × |
| | × | × | |
| × | × | | |

- 1) Donner la liste des monômes maximaux de φ .
- 2) Donner la ou les écritures minimales de φ .

Exercice 2. Météo cryptique (4 points).

Le bulletin météo de demain a été donné de la façon suivante :

- Il fera beau à Avignon ou à Besançon.
 - S'il fera beau à Créteil ou à Avignon, alors il pleuvra sur Besançon.
 - Il pleuvra sur au moins deux de ces trois villes.
- 1) Écrire le bulletin météo sous la forme de formules propositionnelles. On pourra utiliser les prédicats A,B et C pour désigner respectivement "Il fera beau" à Avignon, Besançon et Créteil.
 - 2) Donner la table de vérité du bulletin météo.
 - 3) En déduire sa forme normale conjonctive.
 - 4) Que peut-t-on conclure sur la météo de demain ?

Exercice 3. Récurrence (3 points).

Soit la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_n = 4u_{n-1} + 5n + 2$.

- 1) Calculer u_2 .
- 2) Prouver **par récurrence** que pour tout n , $u_n \equiv 1 \pmod{5}$.

Exercice 4. Sportifs (4 points).

Dans un centre aéré, les enfants (notés par l'ensemble E) peuvent s'adonner à un ou plusieurs sports. On distingue ceux qui font du Foot (F), du Basket (B), et du Judo (J).

- 1) Décrire de manière ensembliste l'ensemble des enfants qui font du Foot ou du Basket mais pas de Judo.
- 2) Décrire par une phrase les enfants de l'ensemble $(F \Delta B) \cup (F \cap J)$.
- 3) On suppose que les 151 enfants du centre aéré font au moins un sport. Parmi eux, 81 font du Foot, 74 font du Basket et 55 font du Judo.
Si seulement 7 enfants font les 3 sports, combien font exactement 2 sports différents ?

Exercice 5. Relations d'entiers (5 points).

Soit \mathcal{R} la relation définie sur $(\mathbb{N}^*)^2 \times (\mathbb{N}^*)^2$ par $(a, b)\mathcal{R}(x, y)$ si, et seulement si, $a \leq x \vee b \leq y$.

- 1) La relation \mathcal{R} est-elle une relation d'équivalence ?
- 2) Soit \ll l'ordre défini sur $(\mathbb{N}^*)^2 \times (\mathbb{N}^*)^2$ par $(a, b) \ll (x, y)$ si, et seulement si, $(a, b) = (x, y)$ ou $a + b \leq x$ ou $a + b \leq y$.
Prouver que $\ll \subset \mathcal{R}$.
- 3) Soit $A = \{(1, 2), (3, 1), (2, 5), (3, 7), (11, 4), (4, 11)\}$.
Dessiner le diagramme de Hasse de \ll dans A .
- 4) Donner les éléments minimaux et maximaux de A et, s'ils existent, les plus grand et plus petit éléments de A .

Exercice 6. Application (4 points).

Soit l'application f de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = (10x + 1) \cdot 10^y$.

- 1) Calculer $f(8, 3)$ et $f(10, 2)$.
- 2) L'application f est-elle surjective ?
- 3) Est-elle injective ? bijective ?
- 4) Donner $f^{-1}(\llbracket 10, 100 \rrbracket)$.