# Fractions rationnelles réelles

R1.07 - Outils mathématiques

monnerat@u-pec.fr

14 janvier 2022

IUT de Fontainebleau

# Définitions

On appelle fraction rationnelle toute fonction réelle $f$ qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction de 2 polynômes :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \ \ (p, q \in \mathbb{R}[x])$$

Exemple : $\dfrac{1}{x^2+1}, \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+x+1}$

Remarques :

- Les polynômes sont des fractions rationnelles (pourquoi ?)
- Leurs écritures n'est pas unique. (pourquoi ?)
- Elles ne sont pas forcément définies sur tout $\mathbb{R}$. (pourquoi ?)

# Polynôme irréductible de $\mathbb{R}[x]$

On admet le théorème suivant : les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont :

- Les polynômes de degré 1.
- Les polynômes de degré 2 sans racines ($\Delta < 0$)

Tout polynôme sur $\mathbb{R}$ se décompose comme un produit de tels polynômes

$$p(x) = c \prod (x - a_i)^{d_i} \prod (x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{n_i}$$

Remarque : la preuve de ce théorème fait intervenir l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

# Partie entière

Soit $f(x)$ une fraction rationnelle. Alors $f$ peut d'écrire sous la forme

$$f(x) = e(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$$

avec $e, p, q$ polynômes, et $\deg p < \deg q$. De plus $e$ est unique. On l'appelle partie entière de $f$.

Preuve : la division euclidienne fournit une telle décomposition. Pour l'unicité, supposons que

$$f(x) = e_1(x) + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = e_2(x) + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}$$

d'où

$$\underbrace{[e_1(x) - e_2(x)]q_1(x)q_2(x)}_{\deg = \deg(\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}) + \deg \boldsymbol{q_1}\boldsymbol{q_2}} = \underbrace{p_2(x)q_1(x) - p_1(x)q_2(x)}_{\deg < \deg \boldsymbol{q_1}\boldsymbol{q_2}}$$

On en déduit que $\deg e_1 - e_2 < 0$, donc $e_1 = e_2$.

Exemple : soit $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 3}{(x-1)(x-2)}$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & x^3 & & +\ x & -\ 3 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{6-6}
- & x^3 & -\ 3x^2 & +\ 2x & & \qquad x + 3 \\ \cline{2-5}
 & & 3x^2 & -\ \ x & -\ 3 & \\
- & & 3x^2 & -\ 9x & +\ 6 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & -\ 9 &
\end{array}
$$

$$f(x) = x + 3 + \frac{8x - 9}{(x-1)(x-2)}$$

# Décompostion

Supposons que l'on veuille additionner 2 fractions

$$\begin{aligned}\frac{8}{x+1} - \frac{5}{x-4} &= \frac{8(x-4)}{(x+1)(x-4)} - \frac{5(x+1)}{(x+1)(x-4)} \\ &= \frac{8x - 32 - 5x - 5}{(x+1)(x-4)} \\ &= \frac{3x-37}{(x-1)(x-4)}\end{aligned}$$

La décompostion d'une fraction consiste à faire ce qui précéde, mais à l'envers.

Quelles fractions "plus simples" a-t-on ajouter pour arriver à une fraction donnée ?

# Théorème de décomposition

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec $\deg p < \deg q$.

On peut décomposer $f$ comme une somme en décomposant au maximum le dénominateur $q$.

Chaque facteur du dénominateur contribue dans la somme suivant la table de correspondance suivante :

$\rightsquigarrow$ facteur $(ax+b)^k$ donne

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(ax+b)^k} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{(ax+b)^i}$$

$\rightsquigarrow$ facteur $(ax^2+bx+c)^k$ donne

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_ix+B_i}{(ax^2+bx+c)^i}$$

Exemple $f(x) = \dfrac{8x - 42}{x^2 + 3x - 18}$

Premièrement, on factorise le dénominateur :

$$f(x) = \frac{8x - 42}{(x+6)(x-3)}$$

Le théorème précédent nous assure que

$$f(x) = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-3}$$

Comment trouver $A$ et $B$ ? On recompose $f$ en identifiant les numérateurs :

$$f(x) = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-3} = \frac{\overbrace{A(x-3) + B(x+6)}^{=8x-42}}{(x+6)(x-3)}$$

- en $x = 3$ : $8.3 - 42 = B(3+6) \Rightarrow B = -2$
- en $x = -6$ : $8.(-6) - 42 = A(-6-3) \Rightarrow A = 10$

Exemple : $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x-1)(x-2)^2}$

Le dénominateur est déjà fatorisé. Le théorème nous assure que

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

En recomposant la fraction et en identifiant le numérateur

$$4x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$$

- en $x = 1$ : $4 = A(-1)^2 \Rightarrow A = 4$
- en $x = 2$ : $16 = C.1 \Rightarrow C = 16$

Contrairement à l'exemple précédent, il n'y a pas de valeur qui nous donnerait directement $B$. Mais ce n'est pas un problème, puisque nous avons $A$ et $C$.

Prenons $x = 0$ : $4(0)^2 = 4(-2)^2 + B(-1)(-2) + 16(-1) \Rightarrow B = 0$

Exemple : $f(x) = \dfrac{3x^3 + 7x - 4}{(x^2+2)^2}$

Le théorème nous assure que

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2+2)^2}$$

En recomposant la fraction, et en identifiant le numérateur

$$3x^3 + 7x - 4 = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D$$

Contrairement aux exemples précédents, il n'y a pas de valeur pour $x$ qui nous permettent de trouver chaque inconnu séparément. On va donc développer, et résoudre un système

$$
\begin{aligned}
3x^3 + 7x - 4 &= (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D \\
&= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D \\
&= Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + 2B + D
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
A & = & 3 \\
B & = & 0 \\
2A + C & = & 7 \\
2B + D & = & -4
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{lcl}
A & = & 3 \\
B & = & 0 \\
C & = & 1 \\
D & = & -4
\end{array}\right.
$$

$$
f(x) = \frac{3x^3 + 7x - 4}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x}{x^2 + 2} + \frac{x - 4}{(x^2 + 2)^2}
$$

# Calcul de l’inverse d’une matrice

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$l_2 \quad \leftarrow \quad l_2 + l_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$l_3 \quad \leftarrow \quad l_3 - 2l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$l_3 \quad \leftarrow \quad -l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{array}{rcl} l_1 & \leftarrow & l_1 + l_3 \\ l_2 & \leftarrow & l_2 - 2l_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$l_2 \quad \leftarrow \quad -l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$l_1 \quad \leftarrow \quad l_1 + 2l_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 8 & -5 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Encore Gauss !

- On dispose la matrice $A$ que l'on souhaite inverser à gauche, l'identité à droite.
- On echelonne et réduit la matrice $A$. Chaque opération sur les lignes de la matrice de gauche est effectuée sur la matrice de droite.
- Si l'on peut echelonner et réduire la matrice de gauche en l'identité, la matrice est inversible, et son inverse est à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \begin{pmatrix} 9 & 8 & -5 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$