TD n° 3 : Polynômes

1. Effectuer la division euclidienne

   - de $x^3 + 2x - 5$ par $x - 1$
   - $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ par $x^2 - 1$
   - de $(x+2)^3(x+1)$ par $(x+1)^2$

2. Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $x^3 - 2x^2 + x$.

3. Soit $p \in \mathbb{R}[x]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de p par $(x-a)$ vaut 1 et que le reste de la division euclidienne par $(x-b)$ vaut -1, que vaut le reste de la division euclidienne de p par $(x-a)(x-b)$?

4. Trouver les réels a, b tels que $(x-1)^2$ divise $ax^4 + bx^3 + 1$. Factoriser le polynôme obtenu.

5. Factoriser le polynôme $p(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

6. a et b étant des nombres réels, déterminer tous les polynômes de la forme $3x^5 + 10x^3 + ax + b$ ayant une racine de multiplicité égal à 3. Factoriser les polynômes obtenus.

7. Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \to |x|; \quad x \to \cos x; \quad x \to e^x; \quad x \to x^{\frac{1}{3}}$$

8. Soient $x_0, \dots x_n$ des réels tous distincts, $n \geq 1$. On considère les polynômes

$$p_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

   (a) Calculer les valeurs de $p_k(x_i)$?

   (b) Montrer que la famille $\{p_0, \dots, p_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est à dire que tout polynôme est une combinaison linéaire unique de $\{p_0, \dots, p_n\}$.

   (c) Construire cette base pour les points $\{1, 2, 3, 4\}$.

   (d) Décomposer le polynôme $x^2 - 3$ dans cette base.

   (e) Trouver un polynôme $p(x)$ de degré minimal donné par la table

x	1	2	3	4
$p(x)$	5	6	1	-4