

Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr 

1^{er} octobre 2021

IUT de Fontainebleau

Partie 2

Relations

Relations

Généralités

Vocabulaires

Propriétés

Relation d'équivalence

Relations

Relations

Généralités

Relation binaire

Soient E et F deux ensembles. Une relation binaire sur $E \times F$ est une partie \mathcal{R} de $E \times F$.

$$\mathcal{R} \text{ relation binaire} \Leftrightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{P}(E \times F) \Leftrightarrow \mathcal{R} \subset E \times F$$

- Lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y . on note aussi $x\mathcal{R}y$.
- Lorsque $E = F$, on parle de relation binaire sur E .
- On peut définir de manière équivalente une relation binaire à l'aide d'un prédicat binaire.

Cas particuliers :

- $\mathcal{R} = \emptyset$.
- $\mathcal{R} = E \times F$.
- L'égalité Δ sur E : $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x = y$ (notée aussi id_E).

Exemples

Soient

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

l'ensemble des élèves et

$$B = \{Math, Info, Ang, Ec\}$$

l'ensemble des cours.

On peut définir les relations suivantes :

- \mathcal{R} qui décrit si un étudiant suit un cours :

$$\mathcal{R} = \{(a, Math), (a, Ec), (b, Info), \\ (c, Ang), (d, Ang), (e, Math), (e, Ang)\}$$

- \mathcal{S} décrit si un étudiant a acheté un cadeau à un autre étudiant définie par

$$\mathcal{S} = \{(b, b), (b, a), (c, a), (c, b), (a, d), (d, c)\}$$

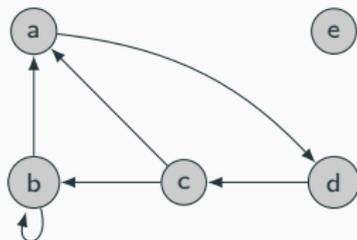
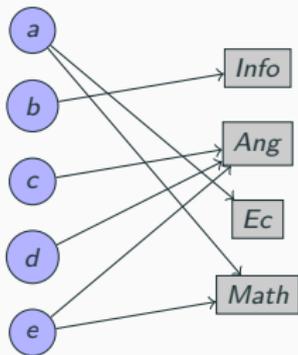
Représentations

Diagramme cartésien et matrice de relation

\mathcal{R}	Math	Ec	Ang	Info
a	V	V		
b				V
c			V	
d			V	
e	V		V	

S	a	b	c	d	e
a				V	
b	V	V			
c	V	V			
d			V		
e					

Diagramme sagittal



Opérations sur les relations

Les relations sont des ensembles. On a droit à inclusion, égalité, union, intersection, différence, etc.

Relation réciproque

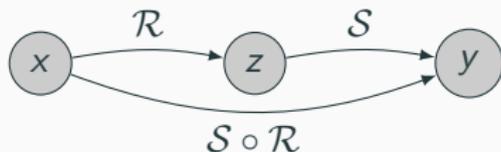
Soit \mathcal{R} une relation sur $E \times F$. On note \mathcal{R}^{-1} la relation sur $F \times E$ définie par

$$x\mathcal{R}^{-1}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

Composée de relations

Soient \mathcal{R} une relation de E vers F et \mathcal{S} une relation de F vers G . On définit la composée \mathcal{T} de \mathcal{S} et \mathcal{R} la relation binaire de E vers G notée $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{S}\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E \times G, (x\mathcal{T}y) \Leftrightarrow (\exists z \in F \ x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{S}y)$$



Relations

Vocabulaires

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation. On définit :

$\forall x \in E,$

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in F, x\mathcal{R}y\}$$

(là où arrivent les flèches qui partent de x)

$A \subset E,$

$$\mathcal{R}(A) = \cup_{x \in A} \mathcal{R}(x)$$

(là où arrivent les flèches qui partent d'un élément de A)

Image. On note

$$\text{im } \mathcal{R} = \mathcal{R}(E)$$

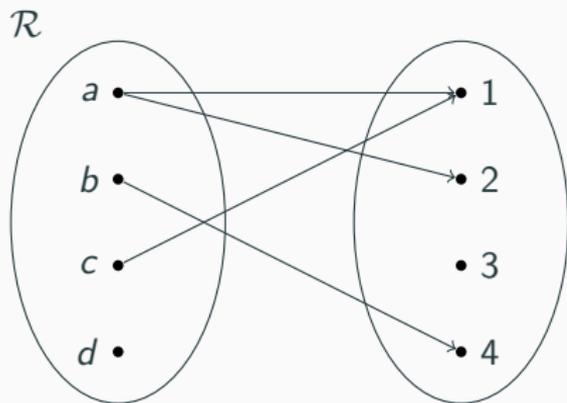
(les éléments de F où arrive une flèche)

Domaine. On note

$$\text{dom } \mathcal{R} = \text{im } \mathcal{R}^{-1}$$

(les éléments de E d'où part une flèche)

Exemple



$$\mathcal{R}(\{a\}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{R}(\{d\}) = \emptyset$$

$$\mathcal{R}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 4\} = \text{im } \mathcal{R}$$

$$\text{dom } \mathcal{R} = \{a, b, c\}$$

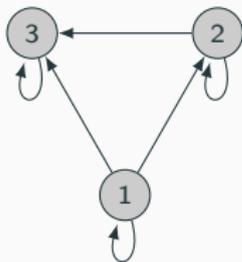
Relations

Propriétés

Réflexive

Une relation \mathcal{R} est **réflexive** ssi $\forall x \in E \ x\mathcal{R}x$

- Diagramme cartésien : la diagonale doit être pleine.
- Diagramme sagittal : chaque sommet porte une boucle.



\mathcal{R}	1	2	3
1	V	V	V
2		V	V
3			V

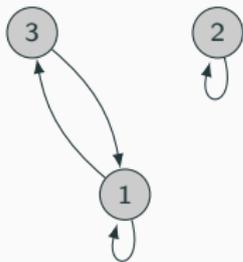
Exemples :

Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est réflexive. Sur \mathbb{N} , la relation \leq est réflexive, mais $<$ n'est pas réflexive.

Symétrie

Une relation \mathcal{R} est **symétrique** ssi $\forall(x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \leftrightarrow y\mathcal{R}x$.

- Diagramme cartésien : symétrie par rapport à la diagonale.
- Diagramme sagittal : quand une flèche va de a vers b , il y a aussi une flèche de b vers a .



\mathcal{R}	1	2	3
1	V		V
2		V	
3	V		

Exemples :

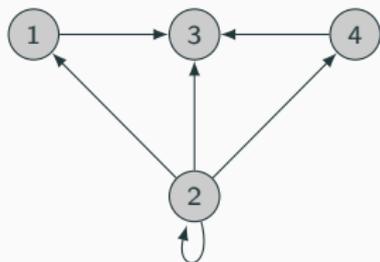
Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est symétrique. Sur \mathbb{N} , la relation \leq n'est pas symétrique.

Transitivité

Transitivité

Une relation \mathcal{R} est **transitive** ssi $\forall(x, y, z) \in E^3 \ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z$

- Diagramme sagittal : tout chemin qui part d'un sommet s et va à un sommet s' en suivant la direction des flèches admet un raccourci, c'est à dire un chemin de longueur un.



	1	2	3	4
1			V	
2	V	V	V	V
3				
4			V	

Exemples : Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est transitive.

Sur \mathbb{N} , la relation \leq est transitive.

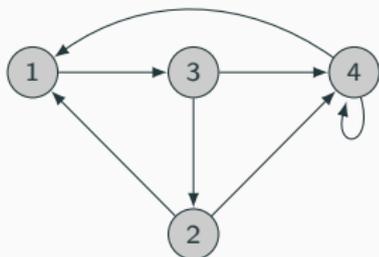
La relation "est le père de" n'est pas transitive.

Antisymétrie

Une relation \mathcal{R} est **antisymétrique** ssi

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$$

- Diagramme sagittal : les seuls aller-retours sont des boucles.



	1	2	3	4
1			V	
2	V			V
3		V		V
4	V			V

Exemples : Sur \mathbb{N} , la relation \leq est antisymétrique.

Fermetures d'une relation

Problème : à partir d'une relation binaire sur un ensemble E , on cherche à rajouter le minimum de couples pour que \mathcal{R} acquiert une propriété donnée.

- *Fermeture réflexive* : On appelle fermeture réflexive $r(\mathcal{R})$ de \mathcal{R} "la plus petite relation" (au sens de l'inclusion) réflexive contenant \mathcal{R} .
- *Fermeture symétrique* : On appelle fermeture symétrique $s(\mathcal{R})$ de \mathcal{R} "la plus petite relation" (au sens de l'inclusion) symétrique contenant \mathcal{R} .
- *Fermeture transitive* : On appelle fermeture transitive $t(\mathcal{R})$ de \mathcal{R} "la plus petite relation" (au sens de l'inclusion) transitive contenant \mathcal{R} .

Propriété : soit \mathcal{R} une relation binaire sur E .

- $r(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta$ avec Δ est la relation d'égalité sur E .
- $s(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$
- $t(\mathcal{R}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}^i$

Relations

Relation d'équivalence

Définition

Une relation binaire définie sur E est une **relation d'équivalence** ssi elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple : Par définition, pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on note $x \equiv_n y$, lire x est congru à y modulo n , si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$.

\equiv_n est une relation d'équivalence.

- **Réflexivité** $x \equiv_n x$ car $x - x = 0.n$ et $0 \in \mathbb{Z}$.
- **Symétrie** si $x \equiv_n y$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k.n$, on a donc $y - x = -k.n$ et $-k \in \mathbb{Z}$ d'où $y \equiv_n x$.
- **Transitivité** si $x \equiv_n y$ et $y \equiv_n z$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = k.n$ et $y - z = k'.n$. Ainsi $x - z = x - y + y - z = (k + k').n$. On en déduit que $x \equiv_n z$

Classes d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . La **classe d'équivalence** d'un élément x , noté \bar{x} , est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x . Autrement dit

$$\bar{x} = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition

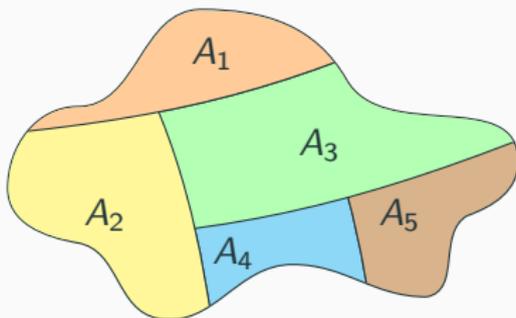
- Une classe d'équivalence n'est jamais vide.
- $\forall x, y \in E$, ou bien $\bar{x} = \bar{y}$, ou bien $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

Classes d'équivalence et partition

Partition

Soit E un ensemble, la famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ indexée par I est une **partition** si :

- l'union des $(A_i)_{i \in I}$ est égale à E , ie $E = \cup_{i \in I} A_i$,
- deux éléments de $(A_i)_{i \in I}$ distincts sont disjoints, ie si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Théorème

Etant donnée une relation d'équivalence sur un ensemble, les classes d'équivalences forment une partition.

Exemple : classes d'équivalence de \equiv_3 sur \mathbb{Z}

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} \\ &= 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{1} &= \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} \\ &= 1 + 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{2} &= \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} \\ &= 2 + 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ensemble quotient

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} . L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E . On le note E/\mathcal{R} .