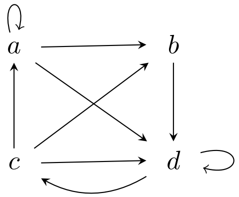
Relations

1. $\mathcal{R}_1$ définie par



$\mathcal{R}_2$ définie par

$\Rsh$	a	b	c	d
a	1	1		1
b	1	1		
c	1	1	1	
d				1

Les relations suivantes sont-elles réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives ?

2. Sur $E = \mathbb{N}^2$, on définit la relation R par

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$$

- Montrer que R est une relation d'équivalence.
- Quels sont ses classes d'équivalence ?

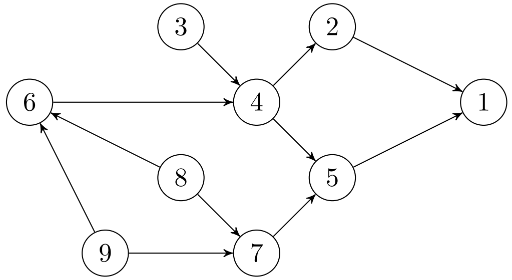
3. Soit $E = \{a, b\}$.
   (a) Combien de relations binaires peut-on définir sur E ?
   (b) Donner leurs représentations sagittales, puis leurs propriétés.

4. On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation R par :

$$(a,b)R(a',b') \Leftrightarrow (a \leq a') \wedge (b \leq b')$$

   (a) Montrer que R est une relation d'ordre.
   (b) Cet ordre est-il total ?
   (c) Soit $A = \{(1,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$.
      i. Établir le diagramme de Hasse de R dans A.
      ii. Donner tous les minorants et majorants de A.
      iii. A admet-elle un plus grand élément ? un plus petit ? des éléments minimaux ?

5. Soit R la relation d'ordre définie sur $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$ par le diagramme de Hasse suivant :



Pour chaque partie suivante, donner l'ensemble des majorants, minorants, bornes inférieure et supérieure, les plus grand et plus petit élément, les éléments maximaux et minimaux :
   (a) $A = \{3, 6\}$
   (b) $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
   (c) $C = \{4, 5, 7\}$
   (d) $D = \{2, 4, 6, 9\}$

6. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, l'ensemble des diviseurs de 60. Soit la relation d'ordre $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ ssi } x \text{ est multiple de } y$$

   (a) $\mathcal{R}$ est-elle totale ?
   (b) $(E, \mathcal{R})$ a-t'il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
   (c) On pose $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A_2 = \{12, 15\}$ et $A_3 = \{2, 3, 4, 6, 12\}$. Donnez pour chacun d'eux les minorants, majorants, plus petit élément, plus grand élément, borne inférieure, borne supérieure, éléments maximaux, minimaux.

Raisonnement par récurrence

1. Montrer que, pour tout $n > 0$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2^{2n} - 1 \quad \text{est divisible par 3}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3$$