Formes normales, simplification

1. On considère le connecteur logique $\oplus$ appelé "ou exclusif" :

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Que représente $\neg(p \oplus q)$? Comparer avec $p \oplus \bar{q}$.
   Exprimer $\oplus$ à l'aide de $\wedge$, $\vee$ et $\neg$.
   Que valent $p \oplus 0$ et $p \oplus 1$? $p \oplus p$?
   Montrer que $\oplus$ est commutatif et associatif.
   Montrer que $1 \oplus 0 \oplus \ldots = 0$ ssi le nombre des 1 dans la somme est pair.

2. On considère les deux connecteurs $\uparrow$ (NAND) et $\downarrow$ (NOR) suivants :

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

   Exprimer $\uparrow$ et $\downarrow$ à l'aide de $\neg$ et $\vee$.
   Montrer que $\uparrow$ et $\downarrow$, séparément, suffisent à exprimer tous les autres.
   Sont-ils commutatifs ? associatifs ?

3.

p	0	0	0	0	1	1	1	1
q	0	0	1	1	0	0	1	1
r	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	1	0	1	1

   Donner les formes canoniques disjonctive et conjonctive de la forme f dépendante de 3 variables p, q et r qui a pour table de vérité

4. Déterminer, **par le calcul**, les formes canoniques disjonctives des formes propositionnelles (de 3 variables) suivantes :

$$pq \vee \bar{p}r \qquad pqr \vee \bar{p}\bar{r} \qquad p \to (q \leftrightarrow r)$$

   En déduire les formes canoniques conjonctives.

5. On appelle **forme normale algébrique** (cf cours) d'une forme propositionnelle l'écriture sous la forme d'un "ou exclusif" de conjonctions (produits) des variables (une conjonction peut-être vide et alors vaut 1). Dans chaque conjonction, on n'écrit pas deux fois la même variable, et dans le "ou exclusif" on n'écrira pas deux fois le même argument.

   Par exemple : $1 \oplus p \oplus pq$, $p \oplus q \oplus r \oplus pq \oplus pqr$ (il n'y a pas de négation)

   (a) Montrer que $\wedge$ est distributif sur $\oplus$, i.e $a \wedge (b \oplus c) \equiv ab \oplus ac$.
   (b) Exprimer $a \vee b$ à l'aide de $\wedge$ et $\oplus$.
   (c) En déduire que toute forme propositionnelle admet une forme normale algébrique (on admettra son unicité).
   (d) Calculer la forme normale algébrique des formes propositionnelles de l'exercice précédent.

6. Donner la forme normale algébrique pour l'exercice 3, en utilisant un système.

7. On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes (a et b) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :

   (a) Il y a au moins un bateau sur la ligne b.
   (b) Il y a au moins un bateau sur la ligne a.
   (c) Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.
   (d) Il n'y a pas de bateau en (b, 1).
   (e) S'il y a un bateau sur la ligne a, alors il n'y en a pas en (b, 3).

   En notant x_i l'information : "il y a un bateau en position (x, i)" pour $x \in \{a, b\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, modélisez par une formule du calcul propositionnel les cinq affirmations ci-dessus, simplifiez au maximum la formule obtenue puis dessinez les modèles correspondants.

8. f étant une forme propositionnelle de n variables, démontrer le théorème de Shannon

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv p_1 f(1, p_2, \ldots, p_n) \vee \bar{p}_1 f(0, p_2, \ldots, p_n)$$

   Par cette méthode trouver la forme canonique disjonctive de la forme suivante : $\neg\,(\bar{p}q \leftrightarrow rs)$.

9. Construire les tableaux de Karnaugh des formes suivantes :

$$a\bar{b} \qquad a\bar{b} \vee b\bar{c} \vee \bar{a}c \qquad ab \to cd \qquad ab \leftrightarrow \overline{abcd} \qquad ab \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus cd \oplus \bar{d}\bar{a}$$

10. Déterminer les formules polynomiales minimales des formes dont voici les tableaux de Karnaugh (leur disposition est $ab \backslash cd$) :

×	×		
	×	×	×
		×	×
			×

×	×	×	×
	×	×	
	×	×	
×			×

×	×	×	×
	×	×	×
		×	×
			×

×		×	
	×	×	×
×	×		×
	×	×	×

×	×	×	×
×		×	×
×	×	×	×
×	×	×	

	×		
	×	×	×
×	×	×	
		×	