Applications, cardinaux

1. Soient E l'ensemble des étudiants de FI1 et $J = \{jj/mm\}$ l'ensemble des jours de l'année. Soit $f : E \to J$ une application qui associe à chaque étudiant sa date de naissance. On considère les familles de parties suivantes : $\{F, G\}$ (filles et garçons) et $\{Janvier, \ldots, Décembre\}$. Décrire en notations ensemblistes les collections suivantes :
   - les anniversaires des filles ;
   - les étudiants nés en Janvier ;
   - les étudiants nés le même jour qu'une des filles.

2. Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$. Déterminer toutes les applications de E dans F et de F dans E. Préciser lesquelles sont injectives, surjectives ou bijectives.

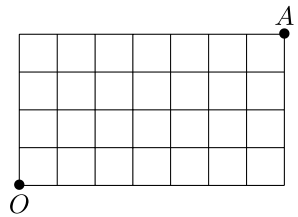
3. Déterminer la nature (in-, sur- ou bijective) des applications suivantes :
   (a) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.
   (b) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

4. Montrer que pour tout logiciel de compression/décompression il existe des fichiers incompressibles de taille quelconque.

5. On associe à tout couple (x, y) de $\mathbb{N}^2$ l'entier naturel
$$u = 2^y(2x + 1) - 1$$
   (a) Pour $x = 5$ et $y = 3$, écrire x et u en base 2.
   (b) Dans le cas général, quelle est l'écriture de u en base 2 ?
   (c) En déduire que l'application qui associe u au couple (x, y) est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

6. Dans une promotion de 109 étudiants en IUT d'informatique, 45 ont déjà codé en Python, 32 en C, 30 ont déjà codé en C++, 13 ont déjà codé en Python et en C++, 6 ont déjà codé en C++ et en C, 14 ont déjà codé en C et en Python et 30 n'ont jamais codé aucun de ces trois langages.
   (a) Combien ont déjà codé en Python, en C et en C++ ?
   (b) Combien ont codé en Python et en C mais pas en C++ ?

7. (a) Soit la permutation $s \in \mathfrak{S}_{10}$ définie par
$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & 3 & 7 & 1 & 8 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
      i. Calculez s^{-1}.
      ii. Calculez $s^2 = s \circ s$.
      iii. Décomposez s en produit de cycles disjoints.
      iv. Donnez la plus petit entier $n \geq 1$ tel que $s^n = i$. (i est la permutation identité)
   (b) Soit σ un cycle de longueur q : $\sigma = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{q-1}, a_q)$
      i. Calculer $\sigma \circ (a_{q-1}, a_q)$
      ii. En déduire une décomposition de σ en produit de transpositions.
      iii. En déduire que toute permutation se décompose en produit de transpositions.
      iv. Calculer une décomposition pour s.
   (c) Combien y a-t-il de cycles de longeur 4 dans $\mathfrak{S}_{10}$?
   (d) Combien y a-t-il de permutations dans $\mathfrak{S}_{10}$ qui se décomposent en un produit de deux cycles disjoints, l'un de longueur 3, l'autre de longueur 6 ?

8. 

Pour aller de O a A, une fourmi se déplace le long d'une grille de $n \times p$ cases (n est la hauteur). Elle va toujours de gauche à droite, et du bas vers le haut. Combien d'itinéraires différents peut-elle emprunter ?

9. Un dimanche matin, un parieur prend 5000 paris différents pour le tiercé de l'après-midi. Que peut-on dire du nombre de chevaux engagés dans la course ?

10. Combien de solutions distinctes l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = n$ possède-t-elle ? (les variables et n sont des entiers naturels)

11. Montrer que pour tout ensemble E (fini ou infini), $|E| < |\mathcal{P}(E)|$; c'est-à-dire il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$, mais pas une bijection. *Indication* : pour toute application $f : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ considérer la partie $A = \{x \in E : \ x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$ et montrer que $f^{-1}(A) = \emptyset$.