Structures algébriques

Rappels Une loi de composition interne (**lci**) $*$ sur un ensemble E est une application de E^2 dans E. La loi $*$

- est *commutative* si $\forall(x,y)\in E^2,\ x*y=y*x$;
- est *associative* si $\forall(x,y,z)\in E^3,\ (x*y)*z=x*(y*z)$;
- admet un *élément neutre* (à gauche, à droite) e si $\forall x\in E,\ e*x=x*e=x$ (resp. $e*x=x$, $x*e=x$). Dans ce cas $x\in E$ est *inversible* s'il existe $x'\in E$ (*inverse*, ou *symétrique* de x) tel que $x*x'=x'*x=e$. Si $*$ est associative alors un tel x' (quand il existe) est unique ; on le note par x^{-1}.

$(E,*)$ est un *semi-groupe* si $*$ est associative et admet un élément neutre ; un *groupe* si, en plus, tous les éléments de E sont inversibles.
Si $(E,*)$ est un groupe et $F\subseteq E$ alors F est un sous-groupe de E si $(F,*)$ est un groupe. Pour que F soit un sous-groupe de E il faut et il suffit que $F\neq\emptyset$ et $\forall(x,y)\in F^2,\ x*y^{-1}\in F$.

1. On munit $G=\{a,b,c,d\}$ d'une lci dont la table est

$*$	a	b	c	d
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

   (a) Cette loi possède-telle un élément neutre ?
   (b) Cette loi est-elle commutative ?
   (c) Cette loi est-elle associative ?
   (d) Est-ce une loi de groupe ?

2. Soit $(G,\circ)$ un groupe dont voici la table

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c
e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

   (a) Quel est son élément neutre ?
   (b) Est-il commutatif ?
   (c) Calculer $b\circ c\circ f$.
   (d) Pour chaque élément, donner son inverse.
   (e) Pour chaque élément, calculer son ordre. Que constatez-vous par rapport à l'ordre du groupe ?

3. Etant donné l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on definit la loi $*$ sur $\mathbb{Q}$ par
$$a*b=a+b-ab$$
   (a) La loi $*$ est-elle associative sur $\mathbb{Q}$? Est-elle commutative ?
   (b) Trouver l'élément neutre de $(\mathbb{Q},*)$.
   (c) Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Q},*)$?

4. On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2},\ a,b\in\mathbb{Q}\}$.
   (a) Montrez que tout écriture $a+b\sqrt{2}$ est unique.
   (b) Vérifiez que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}],+)$ est un groupe commutatif.
   (c) Montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est stable pour le produit. Quel est le neutre du produit ?
   (d) Calculez (dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$) l'inverse de $4+3\sqrt{2}$.
   (e) Montrez que tout élément non nul est inversible (dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$), et donnez son inverse.

5. Soit $E=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et F l'ensemble des applications de E dans E suivantes :
$$f_1:x\to x,\qquad f_2:x\to 1-x,\qquad f_3:x\to\frac{1}{1-x}$$
$$f_4:x\to\frac{x-1}{x},\qquad f_5:x\to\frac{1}{x},\qquad f_6:x\to\frac{x}{x-1}$$
   Montrer que F est un groupe par rapport à la composition des applications, en construisant sa table. F est-il commutatif ?