Formules prédicatives

1. Dans l'univers des humains on considère le prédicat binaire a défini par : $a(x,y) =$ "x aime y". Ecrire symboliquement (en langage des prédicats) :
   - Tout le monde aime quelqu'un.
   - Tout le monde aime tout le monde.
   - Il y a quelqu'un qui aime tout le monde.
   - Il y a quelqu'un qui n'aime personne.
   - Tout le monde s'aime soi-même.
   - Il n'y a personne qui soit aimé par tout le monde.
   - Tout le monde est aimé par quelqu'un.

2. Le prédicat P sur le domaine $D = \{a, b, c\}$ est donné par :

P	a	b	c
a	F	V	V
b	V	V	F
c	F	V	F

   En interprétant P par "... apprécie ...", donner une traduction en langue naturelle et dire si les formules ci-dessous sont vraies ou fausses.
   - $\exists x, P(x,b)$
   - $\forall x P(x,a)$
   - $\forall x P(x,b)$
   - $\exists x \forall y P(y,x)$
   - $\exists x \forall y P(x,y)$
   - $P(a,b) \to \exists x P(x,b)$
   - $\forall x P(x,b) \to P(b,b)$
   - $\forall z P(z,z)$

3. Soit le prédicat sur $\mathbb{N}$ défini par : $\exists y \exists z\, (xy = 60) \wedge (xz = 84)$.

   Donner son arité, les variables libres/liées. Pour quelles valeurs est-il vrai ?

4. Soient les quatre assertions suivantes (les variables représentent toutes des nombres réels) :

   (a) $\exists x\ \forall y\ x + y > 0$

   (b) $\forall x\ \exists y\ x + y > 0$

   (c) $\forall x\ \forall y\ x + y > 0$

   (d) $\exists x\ \forall y\ y^2 > x$

   - Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
   - Ecrire leur négation.

5. On écrit $\exists!\, x\ p(x)$ pour "il existe un et un seul x vérifiant $p(x)$". Exprimer cette affirmation à l'aide d'une formule prédicative. En déduire sa négation.

Notations ensemblistes

1. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Insérez le(s) symbole(s) approprié(s) ($\in$, $\notin$ ou $\subset$) entre les objets suivants :

   $$2 \text{ et } E; \quad \{2\} \text{ et } E; \quad 2 \text{ et } \{2\}; \quad 2 \text{ et } \emptyset; \quad \emptyset \text{ et } \{2\}; \quad \emptyset \text{ et } \emptyset$$

   De quel ensemble $\{2\}$ est-il un élément ?

   (b) Donner tous les éléments de $\mathcal{P}(E)$.

   (c) Donnez un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

2. Définir les ensembles suivants en extension :

   (a) $E = \{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 20\}$

   (b) $E = \{x \in \mathbb{Z}\ :\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ (xy = 60) \wedge (xz = 84)\}$

3. Définir en compréhension les ensembles suivants :

   (a) $E = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 256, \ldots\}$

   (b) $E = \{2, 5, 10, 17, 26, \ldots, 82, \ldots\}$

4. On donne les ensembles : $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \emptyset$, $D = \{3, 4, 5, 7\}$ et $E = \{4, 6, 8\}$.

   (a) Quels sont les inclusions parmi les ensembles A, B, C, D et E ?

   (b) Donner les éléments des ensembles : $A \cup B, A \cap C, B \cup D, B \cap A, E \cap (B \cup D), (E \cap B) \cup D$, $(E \cup B) \cap D, E \cup (B \cap D)$.

5. Supposons que $A \cap B = A \cap C$. Peut-on en déduire que $B = C$? Même question pour $\cup$.

6. La *différence symétrique* de A et B est l'ensemble $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   (a) Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$, $C = \{1, 5\}$. Déterminer les ensembles $A \triangle B$, $B \triangle C$, $(A \triangle B) \triangle C$ et $A \triangle (B \triangle C)$.

   (b) Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

   (c) Quel est le connecteur logique associé à $\triangle$?

   (d) Verifier que $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$ et $\overline{A \triangle B} = \bar{A} \triangle B = A \triangle \bar{B}$.

   (e) Montrer que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

   (f) En déduire que $A \triangle B = A \triangle C$ si et seulement si $B = C$.