Maths 4.2

Les automates finis

Yves Kasparian

Cours reprenant les travaux de Florent Madelaine

BUT 2 Informatique

UNIVERSITÉ PARIS-EST CRÉTEIL
IUT SENART FONTAINEBLEAU

Un peu de vocabulaire

- Alphabet : Σ ensemble fini fixé de symboles.
- Entrée : un mot comportant un nombre fini de symboles de Σ.
- Problème de décision (langage) : ensemble de mots.

Exemple

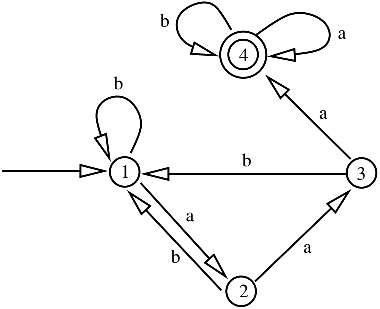
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- Problème des mots qui sont des palindromes (qui sont identiques quel que soit le sens de lecture).
- 101101 est un mot du langage des palindromes.
- 100 n'est pas un mot de ce langage.

Autres exemples de langages

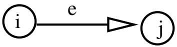
- L'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ représentant un entier pair.
- L'ensemble des mots sur $0, 1$ dont la première et dernière lettre sont identiques.
- L'ensemble des mots sur $0, 1$ dont le nombre de 0 et de 1 est égal.
- L'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ représentant un nombre premier.

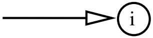
Démo JFLAP

L’automate



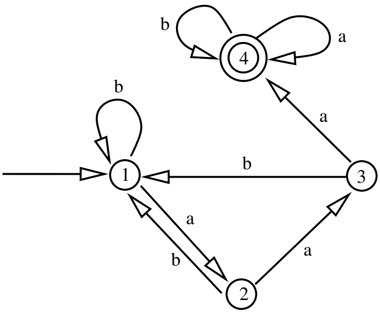
- **État** 

- **Transition** 

- **État initial** 

- **État(s) acceptant(s)**

Le calcul



- Donnée : w
- Début : état initial
- Lire w de gauche à droite lettre par lettre en suivant les transitions
- Fin :
  - Mot terminé
  - Pas de transition possible
- Réponse :
  - Accepté
  - Refusé

Vocabulaire

- état
- état acceptant
- état initial
- transition
- mot accepté par l’automate
- mot rejeté par l’automate

Les mots

- Nos automates manipulent des mots.
- On se fixe un alphabet fini Σ, par exemple, $\Sigma = \{a, b\}$.
- Les mots sont des séquences finies de lettres, par exemple, $abba$ ou encore a ou encore aaa.
- Il y a un mot spécial qu'on appelle le mot vide et qu'on note ϵ (ou encore λ dans certains livres). C'est le mot spécial qui n'a aucune lettre.

Les langages

- On appelle langage un ensemble, fini ou infinis, de mots (sur le même alphabet Σ).
- On note $\Sigma^\star$ le langage de tous les mots (dont le mot vide ϵ).
- On note $\varnothing$ le langage qui ne contient aucun mot.
- Attention à ne pas confondre $\varnothing$ avec $\{\epsilon\}$ (le langage qui contient un seul mot : le mot vide)

Définition

Le langage reconnu par un automate est l'ensemble des mots acceptés par cet automate. On parle aussi du langage de l'automate.

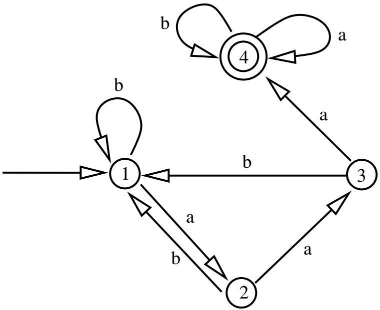
Les langages

- On appelle langage un ensemble, fini ou infinis, de mots (sur le même alphabet Σ).
- On note $\Sigma^\star$ le langage de tous les mots (dont le mot vide ϵ).
- On note $\emptyset$ le langage qui ne contient aucun mot.
- Attention à ne pas confondre $\emptyset$ avec $\{\epsilon\}$ (le langage qui contient un seul mot : le mot vide)

Définition

Le langage reconnu par un automate est l'ensemble des mots acceptés par cet automate. On parle aussi du langage de l'automate.

Décrire un automate



- Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$
- Ensemble (fini) d'états $Q = \{1, 2, 3, 4\}$
  - État initial $q_0 = 1$
  - État(s) acceptant(s) $Q_A = \{4\}$
- Table de transition δ

	a	b
1	2	1
2	3	1
3	4	1
4	4	4

Intuition

- états = mémoire finie de l’automate
- tableau de transition = programme de l’automate

Problème : comment décrire un langage autrement qu'en donnant un automate ?

- La description d'un langage en Français est souvent ambigüe
- On a besoin d'une façon plus mathématique de décrire les langages des automates, appelée « les expressions régulières »
- On utilise pour cela trois opérations : la concaténation, la réunion et l'étoile

Expressions régulières

- La concaténation L_1L_2 :
  un mot du langage L_1 suivi d'un mot du langage L_2

Exemple

$$L_1 = \{aa, bb\} \text{ et } L_2 = \{ab, bba, b\}$$
$$\Downarrow$$
$$L_1L_2 = \{aaab, aabba, aab, bbab, bbbba, bbb\}$$

Expressions régulières

- La réunion $L_1 + L_2$:
  un mot du langage L_1 ou bien du langage L_2

Exemple

$$L_1 = \{aa, bb\} \text{ et } L_2 = \{ab, bba, b\}$$
$$\Downarrow$$
$$L_1 + L_2 = \{aa, bb, ab, bba, b\}$$

Expressions régulières

- L'étoile L^* : concaténation d'un nombre quelconque (peut-être nul) de mots du langage L

Exemple

$$L = \{aa, bb\}$$
$$\Downarrow$$
$$L^* = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon, \\ aa, bb, \\ aaaa, aabb, bbaa, bbbb, \\ aaaaaa, aaaabb, aabbaa, \ldots \\ \ldots \end{array} \right\}$$

- Formellement, $L^\star = \{\epsilon\} + L + LL + LLL + \ldots$.

Expressions régulières

Remarques

- Langage composé d'un seul mot : $\{abba\}$ est noté $abba$
- Langage fini : $\{ab, bba, b\}$ est noté $ab + bba + b$
- Langage composé de tous les mots : Σ^* est aussi noté $(a + b)^*$

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui contiennent aa ou bb

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui contiennent aa ou bb

$$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui contiennent aa ou bb

$$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

ou

$$(a+b)^*aa(a+b)^* + (a+b)^*bb(a+b)^*$$

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui commencent par aa et finissent par bb

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui commencent par aa et finissent par bb

$$aa(a+b)^*bb$$

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, le langage constitué des mots qui commencent par aa et finissent par bb

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, le langage constitué des mots qui commencent par aa et finissent par bb

$$aa(a+b+c)^*bb$$

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui commencent par aa ou finissent par bb

Expression régulière représentant un langage donné

- Sur l'alphabet $\{a, b\}$, le langage constitué des mots qui commencent par aa ou finissent par bb

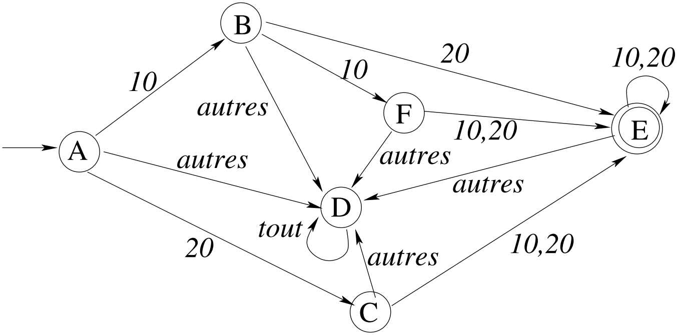
$$aa(a+b)^* + (a+b)^*bb$$

Machine à café

- Une machine à café simple accepte les pièces de 10 centimes et 20 centimes
- Un café coûte 30 centimes
- Quand le montant est suffisant, elle libère un bouton permettant d’obtenir le café
- Elle ne rend pas la monnaie

Machine à café

- Une machine à café simple accepte les pièces de 10 centimes et 20 centimes
- Un café coûte 30 centimes
- Quand le montant est suffisant, elle libère un bouton permettant d'obtenir le café
- Elle ne rend pas la monnaie

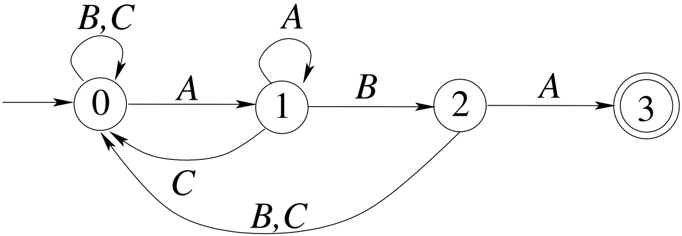


Digicode

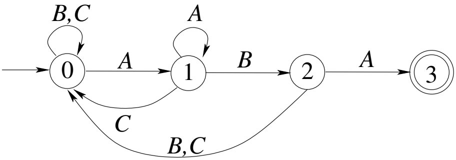
- Un digicode avec trois touches A, B, C ouvre la porte dès qu'on a tapé ABA

Digicode

- Un digicode avec trois touches A, B, C ouvre la porte dés qu'on a tapé ABA



Digicode



- Spécification : porte ouverte en 3 et fermée sinon

- Propriétés structurelles :
  - On vient de taper *A* (vrai en 1 et 3, faux sinon)
  - On vient de taper *B* (toujours vrai en 2, parfois vrai ailleurs)
  - L'état précédent est 2 (vrai en 3 seulement)
  - Etc.

- À vérifier
  - Si la porte s'ouvre, c'est que les 3 dernières lettres tapées sont *ABA*
  - Toute suite de lettres tapées finissant par *ABA* ouvre la porte

Langages de programmation

Contraintes syntaxiques

- Tous les programmes doivent commencer par `begin` et finir par end

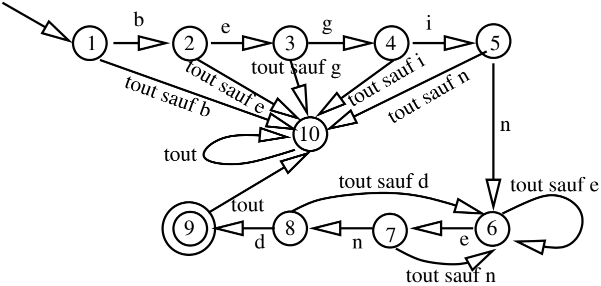
Compilation

Langages de programmation

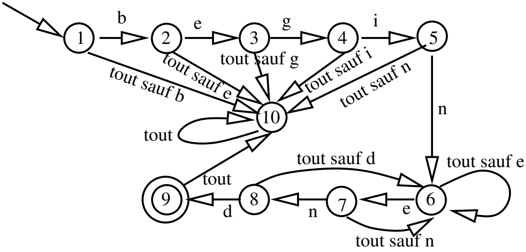
Contraintes syntaxiques

- Tous les programmes doivent commencer par `begin` et finir par end

Compilation

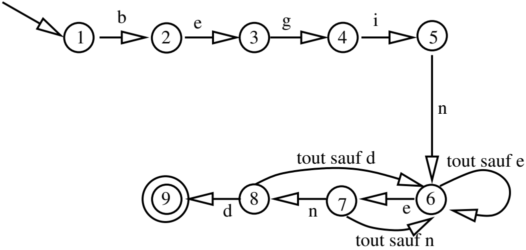


État de rebut



- Rebut pas obligatoire
- Si pas de rebut, le calcul peut se bloquer avant la fin
  - Le mot est alors REFUSÉ
- Si pas de rebut, la table de transition peut contenir des cases vides

État de rebut



- Rebut pas obligatoire
- Si pas de rebut, le calcul peut se bloquer avant la fin
  - Le mot est alors REFUSÉ
- Si pas de rebut, la table de transition peut contenir des cases vides