IUT BUT3
Année 2023-24

IA pour les Jeux
Introduction

Florent Madelaine

Contenu : rappels sur les graphes et les arbres, les différents types de jeux et en particulier les jeux comme les échecs ou les dames (à deux joueurs jouant en alternance, sans hasard, et à information complète), arbres de jeux, stratégie gagnante, détermination du vainqueur avec minimax.

Les feuilles de TD et d'autres documents et informations sont disponibles sur git.

1 Vocabulaire

Graphe non-orienté. Un *graphe* est un couple $G = (S, A)$ où :
- S est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appelés *sommets*[1] (les points sur nos dessins).
- A est un ensemble de paires de sommets appelées *arêtes*[2] (les traits sur nos dessins).

Le vocabulaire de base pour les graphes se compose de mots simples au sens en général clair dans le contexte. Par exemple, on dit que deux sommets sont *voisins* si il sont reliés par une arête. On parlera ainsi de *chemins* de *cycles*. Un graphe dans lequel il existe un chemin entre toute paire de points est *connexe*. Pour plus de détails, voir le cours de première année.

Un *arbre* est un graphe qui est connexe et sans cycle.

Construction Récursive des Arbres.
- Un graphe avec un seul sommet et zéro arête est un arbre
- À partir d'un arbre avec au moins 1 sommet, en accrochant une feuille n'importe où, on obtient un arbre avec un sommet et une arête de plus.

On va voir en exercice comment on peut justifier cette construction.

Graphe orienté. Un **graphe orienté**[3] ressemble a un graphe sauf que maintenant les paires de sommets sont orientées et qu'on les appelle des *arcs* (un trait avec une flèche pour l'orientation sur nos dessins). L'ordre dans lequel on écrit la paire des sommets d'un arc indique l'orientation de cet arc. Ainsi, l'arc (x, y) est différent de l'arc (y, x).

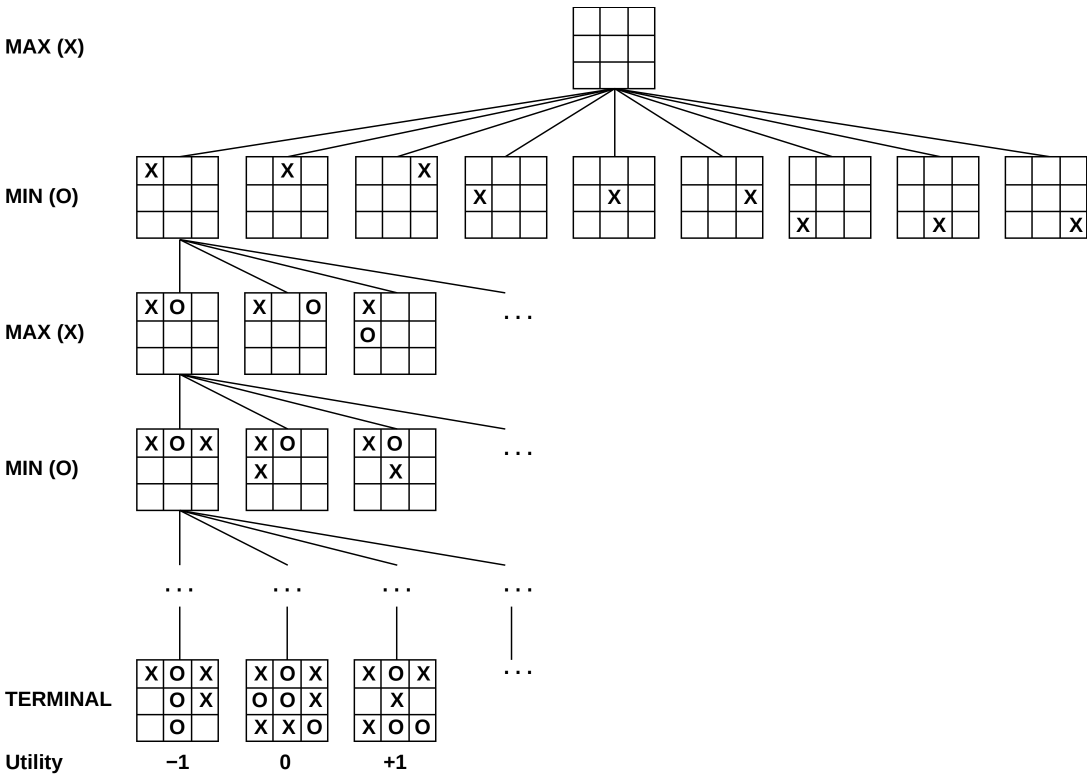
Arbre enraciné. En informatique, on trouve très souvent des *arbres orientés*, dont l'orientation correspond au choix d'un sommet particulier, *la racine*, dans un arbre (non orienté). Pour avoir la bonne intuition, pensez à l'arbre généalogique d'une amibe (dont la reproduction est asexuée). On peut voir la racine comme le père de ses voisins (orientation de l'arc depuis la racine vers son fils) et ainsi de suite pour les *niveaux* suivants. On parlera donc d'*arbre enraciné*.

1. sommet = *vertex* en anglais (*vertices* au pluriel)
2. *edge* en anglais
3. *directed graph* en anglais, parfois nommé par la contraction *digraph*.

2 Notions de base sur les jeux

De quels jeux parle-t-on ? On s'intéresse à des jeux comme le morpion (*Tic Tac Toe*). Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, qui jouent en alternance. Il n'y a pas de hasard (jeu déterministe) et il n'y a pas de secret (jeu à information complète). Il s'agit aussi d'un jeu à somme nulle (les joueurs n'ont aucun intérêt à coopérer : la somme des gains de chaque joueur est égale à zéro). Finalement, à chaque étape un joueur n'a qu'un nombre fini de coups et une partie comporte forcément un nombre fini de coups. Pour faire court, on dira qu'un jeu ayant ces propriétés et un *jeu minimax.*

Arbre de jeu Dans le cas des jeux minimax, on peut construire un arbre enraciné, qu'on appele *arbre de jeu* est qui contient toutes les informations importantes sur ce jeu. Voici un exemple d'une partie de l'arbre de jeu du morpion.



On construit l'arbre de jeu de la manière suivante.

- La racine correspond à l'état du jeu au début (l'état du jeu correspond à la description du jeu : où sont les pièces, qui possède telle carte etc).
- Si le joueur 1 commence à jouer, les fils de la racine dans l'arbre de jeu seront tous les états qu'on peut atteindre en jouant l'un des coups du joueur 1.
- Pour un nœud quelconque de l'arbre, ses fils sont déterminés par les coups possibles du joueur dont c'est le tour.
- Les feuilles de l'arbre de jeu correspondent à des états à partir desquelles il n'y a plus de coups possibles, c'est-à-dire que la partie est terminée et qu'on connaît qui a gagné ou bien si les joueurs ont fait match nul.
- Sur chaque feuille, on peut noter une valeur correspondant aux gains (*utility* sur le dessin ci dessus). Dans un jeu à deux joueurs, on peut par exemple prendre 0 pour match nul, $+1$ pour une victoire du premier joueur et -1 pour une victoire du second joueur.

Stratégie.

- Une stratégie est une méthode qui permet a une joueur de choisir son prochain coup (c'est une fonction qui, étant donné un état du jeu, retourne un coup possible : c'est ce qu'on va implémenter en TP).
- Un joueur a une *stratégie gagnante* si il a une stratégie qui lui permet de toujours gagner, et ce quels que soient les coups de l'adversaire.
- Un joueur a une *stratégie nulle* si il dispose d'une stratégie qui lui permet toujours de ne pas perdre (soit gagner, soit faire match nul), et ce quels que soient les coups de l'adversaire.

Proposition 1 (sur les stratégies). *Dans un jeu minimax, si un joueur a une stratégie gagnante, alors*

- *il a aussi une stratégie nulle,*
- *mais, son adversaire ne peux pas avoir de stratégie nulle.*

Dans un jeu minimax, si un joueur n'a pas de stratégie nulle, alors son adversaire a une stratégie gagnante.

Que se passe-t-il si les deux joueurs jouent parfaitement ? L'*algorithme minimax* vu en cours permet de déterminer la meilleure stratégie possible pour le joueur qui commence (le premier joueur), quelle que soit la stratégie de l'autre joueur, et donc en particulier quand ce second joueur joue parfaitement.

Théorème 1 (minimax). *Dans un jeux minimax, seulement deux cas sont possibles :*

- *soit l'un des joueurs a une stratégie gagnante ; ou bien,*
- *soit les deux joueurs ont tous les deux une stratégie nulle.*

De plus, la stratégie du premier joueur est déterminée par l'algorithme minimax.

L'algorithme minimax. On fait remonter les valeurs dans l'arbre de jeu depuis les feuilles vers la racine.

1. La valeur d'une position où le premier joueur doit jouer le prochain coup est obtenue en prenant le **maximum** des valeurs des positions suivantes.
2. La valeur d'une position où l'autre joueur doit jouer le prochain coup est obtenue en prenant le **minimum** des valeurs des positions suivantes.

On arrête lorsque la valeur de la racine est connue. Si c'est 0, les deux joueurs ont une stratégie nulle, si c'est $+1$ alors le premier joueur a une stratégie gagnante, si c'est -1 alors c'est son adversaire qui a une stratégie gagnante.

3 Exercices à rédiger pendant le TD

Exercice 1. Les arbres.

1. Démontrez qu'un arbre ayant au moins deux sommets a forcément au moins une feuille.

2. Démontrez les assertions suivantes.

i. Deux sommets distincts d'un arbre sont reliés par exatement une chaîne.

> La connexité implique l'existence de chaînes. L'absence de cycle force la chaîne a être unique.

ii. Enlever une arête quelconque à un arbre le déconnecte

Sinon il y aurait un cycle avant d'enlever l'arête ce qui est absurde.

iii. Ajouter une arête quelconque à un arbre crée un cycle

Si on ajoute l'arête $\{x, y\}$ (qui n'est pas déjà présente) alors comme l'arbre était connexe il existe un chemin P de $\{x, y\}$ et P plus l'arête $\{x, y\}$ forme un cycle.

3. Démontrez que si un graphe vérifie les trois propriétés de la question précédente, alors c'est un arbre. C'est-à-dire, Si G est un graphe avec au moins deux sommets tel que,
- deux sommets distincts de G sont reliés par exactement une chaîne ;
- enlever une arête quelconque de G le déconnecte ; et,
- ajouter une arête quelconque à G crée un cycle,

alors G est un arbre.

Le premier point implique la connexité. Le second point implique l'absence de cycle.

4. Montrez qu'un arbre à n sommets avec $n \geq 1$ a exactement $n - 1$ arêtes.

On prouve ce résultat par récurrence sur le nombre de sommets.

Le seul arbre avec 1 sommet n'a pas d'arête. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$.

On suppose le résultat vrai pour $n \geq 1$ fixé. Soit A un arbre avec $n + 1$ sommets. On doit montrer que A a n arêtes. On prend une arête e et on l'enlève de A. On obtient ainsi deux graphes G_1 et G_2 d'après la seconde propriété ci-dessus. Ces deux graphes sont acycliques (puisque A l'était). Ces deux graphes sont connexes (sinon A ne serait pas connexe). On a donc montré que G_1 et G_2 sont des arbres. Soit n_1 le nombre de sommets de G_1 et n_2 le nombre de sommets de G_2. On a $n+1 = n_1 + n_2$. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que G_1 a $n_1 - 1$ arêtes et que G_2 a $n_2 - 1$ arêtes. Le graphe G a donc $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$ arêtes en comptant l'arête e. En faisant le calcul on trouve bien n arêtes.

Exercice 2. Puissance 2.

On se penche sur le jeu de *Puissance 2*. On y joue sur $2 \times 2 = 4$ cases ; et, pour gagner, un joueur doit aligner 2 de ses pions verticalement, horizontalement ou diagonalement. Notons qu'il s'agit d'une variante du célèbre jeu *Puissance 4*, et que pour placer un pion le joueur dont c'est le tour choisit une colonne qui n'est pas pleine et que les pions tombe par gravité sur la case libre la plus basse.

1. Dessinez l'arbre de jeu.

voir correction en TD.

2. Sans appliquer minimax, montrez que le second joueur n'a ni une stratégie nulle, ni une stratégie gagnante.

Toutes les feuilles sont gagnantes pour le premier joueur. Le second joueur est fait comme un rat !

3. En déduire que le premier joueur a une stratégie gagnante.

Le premier joueur n'a pas besoin de réfléchir. Tous ces choix sont corrects. Toutes les stratégies sont gagnantes pour lui. C'est un cas très atypique.

4. Appliquer Minimax.

Voir correction en TD.

5. Montrez qu'on peut se ramener à un arbre de jeu deux fois plus petit.

Comme le jeu a une symétrie centrale, on peut toujours se ramener à l'un des deux premiers coups (voir correction en TD pour les détails).

Exercice 3. Arbre de jeu du morpion.

1. Soit A l'arbre de jeu du morpion (partiellement dessiné page 2). Combien la racine a-t-elle de fils ?

9 puisqu'il y a 9 coups possibles pour le premier joueur (un par case).

2. Et les fils de la racine ?

8 puisqu'il ne reste plus que 8 cases vides.

3. Si la racine est au niveau 0 de l'arbre, ses fils au niveau 1 et ainsi de suite, combien de sommets y-a-t-il dans l'arbre A sur les cinq premiers niveaux ?

Dans les cinq premiers niveaux, il y a au plus 4 pions. Tant qu'il y a au plus 4 pions, aucun des joueurs n'a pu mettre trois pions donc la partie n'est pas terminée. On peut facilement compter le nombre de sommets par niveau.

- Il y a 1 racine (1 sommet au niveau 0).
- La racine a 9 fils (1×9 sommets au niveau 1).
- Chaque fils de la racine a 8 fils (9×8 sommets au niveau 2).
- Les noeuds du niveau 2 ont chacun 7 fils ($9 \times 8 \times 7$ sommets au niveau 3).
- Ceux du niveau 3 en ont 6 et ceux du niveau 4 en ont 5 (soit $9 \times 8 \times 7 \times 6$ sommets au niveau 4 et $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ sommets au niveau 5).

Ainsi pour les cinq premiers niveaux on a

$$1 + 9 + 9 \times 8 + 9 \times 8 \times 7 + 9 \times 8 \times 7 \times 6 + 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 18\,721$$

sommets dans l'arbre A.

4. Montrez qu'il y a au plus $362\,880$ parties de morpion différentes.

Notons que une partie correspond exactement à une branche vers une feuille.

On compte donc les feuilles de l'arbre A. Ce n'est pas facile de les compter exactement puisque contrairement au 5 premiers niveaux, on peut gagner une partie avant d'avoir rempli toutes les cases (donc avant le niveau 9). Sans l'aide d'une machine, on ne pourra donc que trouver une majoration. En effet, l'arbre de jeu du morpion A est un sous-arbre de l'arbre complet B de hauteur 9 et de degrés par niveau respectifs depuis la racine 9,8,7,....,2 et 1. Donc, le nombre de feuilles de A est plus petit que le nombre de feuilles de B. Il est facile de compter les feuilles de B. L'arbre B a $9!$ feuilles avec $9! = 362\,880$.

5. Majorez les sommets de A par $986\,410$.

On procède comme à la question précédente. On regarde les sommets de l'arbre B. En fait, on remarque que pour le niveau i, on a $\frac{9!}{(9-i)!}$ sommets. L'arbre B a en tout le nombre de sommets suivant.

$$1 + 9 + 9 \times 8 + 9 \times 8 \times 7 + \ldots + \frac{9!}{3!} + \frac{9!}{2} + 9!$$

On peut réorganiser l'expression pour la calculer plus facilement avec une calculette en la factorisant à la façon de Horner.

$$1+9\times(1+8\times(1+7\times(1+6\times(1+5\times(1+4\times(1+3\times(1+2\times(1+1))\ldots) = 986\,410.$$

6. Bornez le nombre de sommets de l'arbre de jeu du morpion.

On a entre 18 721 et 986 410 sommets dans l'arbre de jeu du morpion.

7. Qu'est-ce-qu'un *état du jeu* pour le jeu du morpion ?

Il s'agit d'une configuration de croix et de ronds sur les 9 cases pouvant apparaitre lors d'une partie de morpion.

8. Montrez qu'il y a au plus 19 683 états possibles au morpion ?

En comptant des configurations illégales, il s'agit de faire un choix parmi x, o et vide pour chacune des 9 cases. $3^9 = 19\,683$.

9. Montrez qu'il existe des sommets de l'arbre correspondant au même état du jeu.

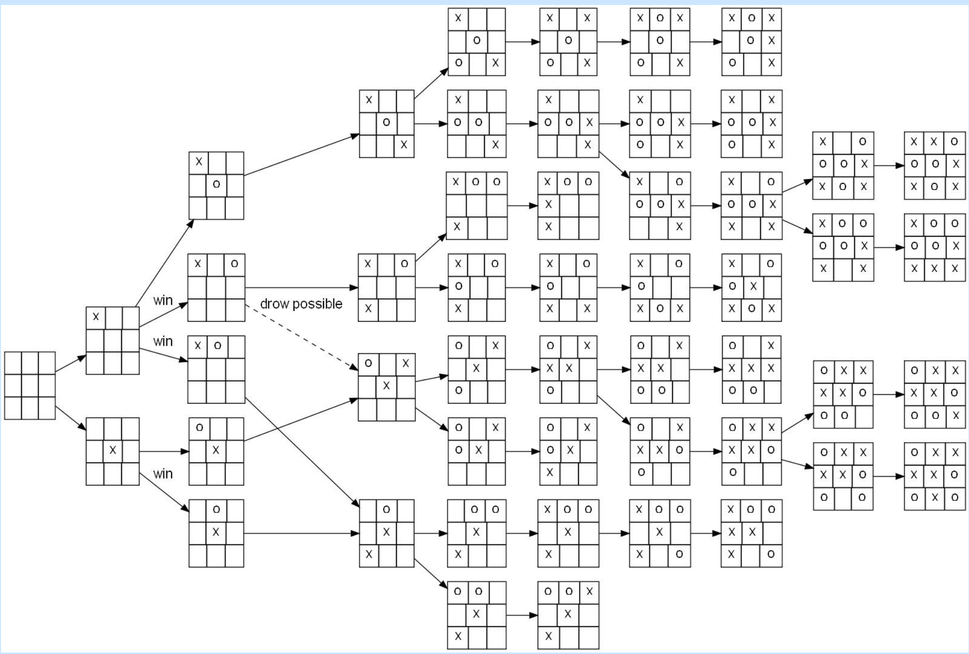
On peut arriver à la même configuration en jouant les pions aux même positions mais dans un ordre différent. On trouve facilement des exemples avec 2 croix et un rond par exemple.

10. Expliquez comment on peut se ramener à un arbre de jeu où la racine a 3 fils seulement. Au plus combien de sommets aura ce nouvel arbre ?

Le jeu de morpion est symétrique. En fait il y a seulement 3 façons de jouer au début : soit dans un coin, soit sur la case du centre, soit au milieu d'un bord. On peut donc reprendre les calculs précédents en remplaçant 9 par 3.

$$1+3\times(1+8\times(1+7\times(1+6\times(1+5\times(1+4\times(1+3\times(1+2\times(1+1))\ldots) = 328\,804.$$

Notons qu'on pourrait faire encore mieux si on tenait compte des symmétries tout au long de l'arbre. En effet, en jouant sur les symmétries à chaque niveau et en ne recopiant pas les branches identiques, on peut se ramener à un graphe orienté acyclique assez petit



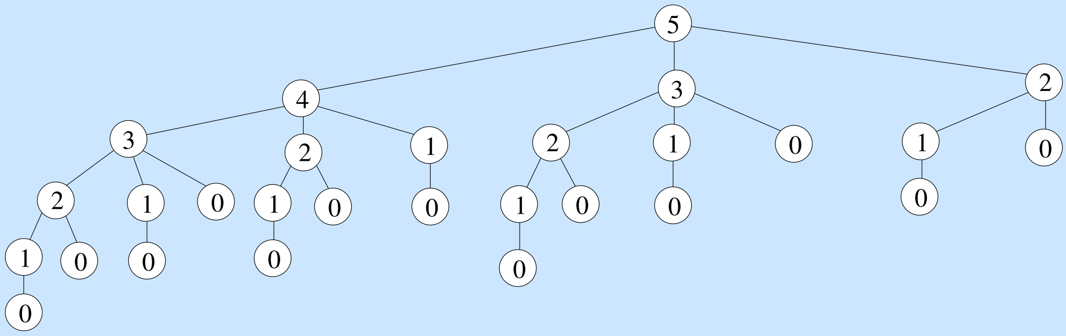
Exercice 4. Jeu de Nim

1. Le jeu de Nim est un jeu très ancien qui se joue avec des allumettes, des jetons, des cailloux, etc. Les règles possèdent de multiples variantes. En voici une version très simple :

- Au départ, on dispose d'un tas de 5 allumettes.
- À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes.
- Le vainqueur est celui qui enlève la (ou les) dernière(s) allumette(s).

Montrez que dans cette version du jeu de Nim, le premier joueur possède une stratégie gagnante. Justifiez soigneusement votre réponse.

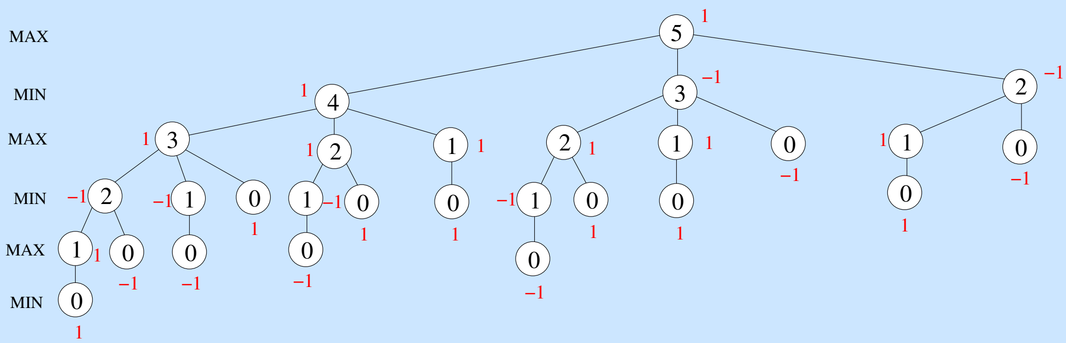
On dessine l'arbre de jeu. Le nombre d'allumettes restantes est indiqué à chaque nœud.



On applique l'algorithme minimax en alternant les nœuds max et les nœuds min le long de chaque branche, la racine étant un nœud max.

La rétribution pour chaque feuille est indiquée en rouge, avec la convention que 1 représente une partie gagnée par le premier joueur et -1 une partie gagnée par le second joueur (il n'y a pas de matches nuls).

On calcule la valeur du minimax des feuilles vers la racine. Pour un nœud max, on prend le maximum de la valeur de ses fils et pour un nœud min, on prend le minimum de la valeur de ses fils. Le résultat du calcul de l'algorithme est indiqué en rouge pour chaque nœud intérieur.



La valeur obtenue par l'algorithme minimax pour la racine de l'arbre de jeu est 1, ce qui signifie que le premier joueur a une stratégie gagnante : il possède une suite de coups qui lui garantissent de gagner toutes les parties, quels que soient les coups joués par son adversaire.

Comme le jeu est très simple, on peut énoncer simplement la stratégie gagnante du premier joueur : prendre une seule alumette au premier coup. Ensuite, que le second joueur prenne 1, 2 ou 3 alumettes, il suffit au premier joueur de prendre les 3, 2 ou 1 alumette(s) restante(s) pour gagner la partie.

Exercice 5. Minimax.

On s'intéresse à l'arbre de jeu page 9. La rétribution est indiquée pour chaque feuille, avec la convention que 1 représente une partie gagnée par le premier joueur, -1 une partie gagnée par le second joueur et 0 représente un match nul.

1. Déterminez le meilleur coup pour le premier joueur. Justifiez votre réponse. Illustrez votre propos sur l'arbre et indiquez la méthode utilisée.

On utilise l'algorithme minimax pour déterminer le meilleur coup pour le premier joueur.

On alterne les nœuds max et les nœuds min le long de chaque branche, la racine étant un nœud max.

La rétribution pour chaque feuille est donnée au départ.

On calcule la valeur du minimax des feuilles vers la racine. Pour un nœud max, on prend le maximum de la valeur de ses fils et pour un nœud min, on prend le minimum de la valeur de ses fils. Le résultat du calcul de l'algorithme est indiqué en rouge pour chaque nœud intérieur.

Le meilleur coup possible pour le premier joueur est le coup le plus à gauche, puisque c'est celui qui rapporte la plus grande valeur, à savoir 0.

2. Le premier joueur possède-t-il une stratégie gagnante ? Justifiez votre réponse.

Non, le premier joueur ne possède pas de stratégie gagnante pour le jeu représenté par cet arbre.

En effet, la valeur calculée par l'algorithme minimax est 0, ce qui signifie que si le premier joueur joue parfaitement, il peut forcer un match nul, mais pas gagner n'importe quelle partie.