IUT BUT3
Année 2023-24

IA pour les Jeux
Introduction

Florent Madelaine

Contenu : rappels sur les graphes et les arbres, les différents types de jeux et en particulier les jeux comme les échecs ou les dames (à deux joueurs jouant en alternance, sans hasard, et à information complète), arbres de jeux, stratégie gagnante, détermination du vainqueur avec minimax.

Les feuilles de TD et d'autres documents et informations sont disponibles sur git.

1 Vocabulaire

Graphe non-orienté. Un *graphe* est un couple $G = (S, A)$ où :
- S est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appelés *sommets*[1] (les points sur nos dessins).
- A est un ensemble de paires de sommets appelées *arêtes*[2] (les traits sur nos dessins).

Le vocabulaire de base pour les graphes se compose de mots simples au sens en général clair dans le contexte. Par exemple, on dit que deux sommets sont *voisins* si il sont reliés par une arête. On parlera ainsi de *chemins* de *cycles*. Un graphe dans lequel il existe un chemin entre toute paire de points est *connexe*. Pour plus de détails, voir le cours de première année.

Un *arbre* est un graphe qui est connexe et sans cycle.

Construction Récursive des Arbres.
- Un graphe avec un seul sommet et zéro arête est un arbre
- À partir d'un arbre avec au moins 1 sommet, en accrochant une feuille n'importe où, on obtient un arbre avec un sommet et une arête de plus.

On va voir en exercice comment on peut justifier cette construction.

Graphe orienté. Un **graphe orienté**[3] ressemble a un graphe sauf que maintenant les paires de sommets sont orientées et qu'on les appelle des *arcs* (un trait avec une flèche pour l'orientation sur nos dessins). L'ordre dans lequel on écrit la paire des sommets d'un arc indique l'orientation de cet arc. Ainsi, l'arc (x, y) est différent de l'arc (y, x).

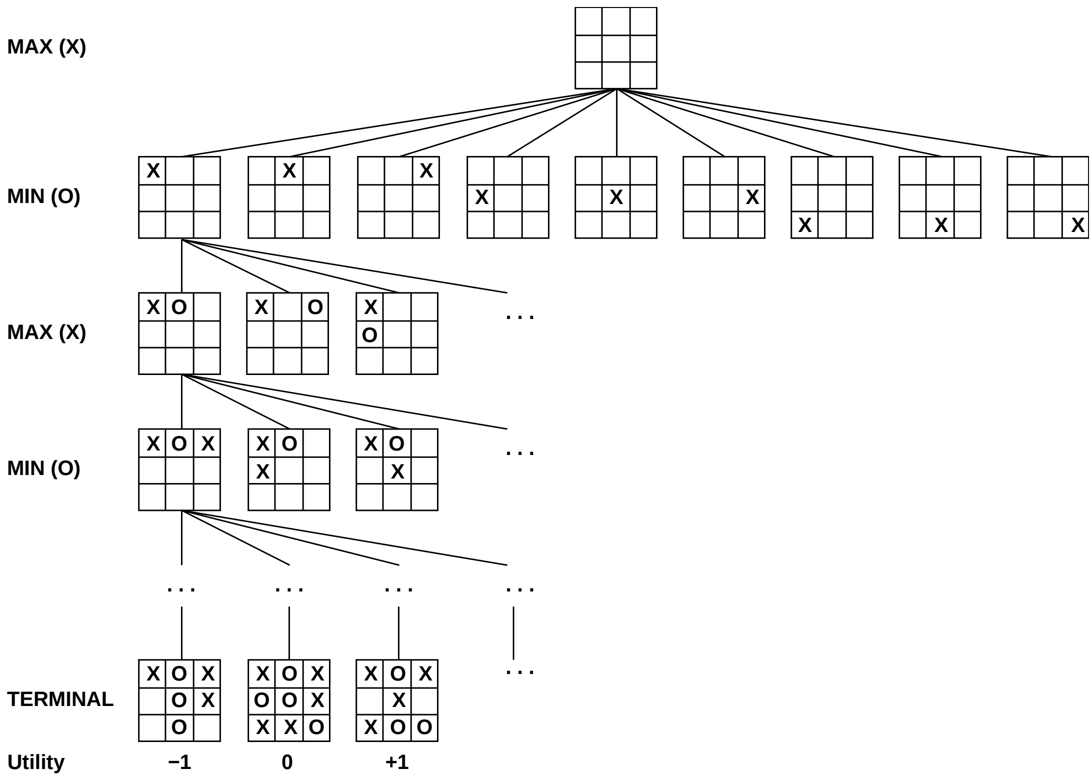
Arbre enraciné. En informatique, on trouve très souvent des *arbres orientés*, dont l'orientation correspond au choix d'un sommet particulier, *la racine*, dans un arbre (non orienté). Pour avoir la bonne intuition, pensez à l'arbre généalogique d'une amibe (dont la reproduction est asexuée). On peut voir la racine comme le père de ses voisins (orientation de l'arc depuis la racine vers son fils) et ainsi de suite pour les *niveaux* suivants. On parlera donc d'*arbre enraciné*.

1. sommet = *vertex* en anglais (*vertices* au pluriel)
2. *edge* en anglais
3. *directed graph* en anglais, parfois nommé par la contraction *digraph*.

2 Notions de base sur les jeux

De quels jeux parle-t-on ? On s'intéresse à des jeux comme le morpion (*Tic Tac Toe*). Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, qui jouent en alternance. Il n'y a pas de hasard (jeu déterministe) et il n'y a pas de secret (jeu à information complète). Il s'agit aussi d'un jeu à somme nulle (les joueurs n'ont aucun intérêt à coopérer : la somme des gains de chaque joueur est égale à zéro). Finalement, à chaque étape un joueur n'a qu'un nombre fini de coups et une partie comporte forcément un nombre fini de coups. Pour faire court, on dira qu'un jeu ayant ces propriétés et un *jeu minimax*.

Arbre de jeu Dans le cas des jeux minimax, on peut construire un arbre enraciné, qu'on appele *arbre de jeu* est qui contient toutes les informations importantes sur ce jeu. Voici un exemple d'une partie de l'arbre de jeu du morpion.



On construit l'arbre de jeu de la manière suivante.

- La racine correspond à l'état du jeu au début (l'état du jeu correspond à la description du jeu : où sont les pièces, qui possède telle carte etc).
- Si le joueur 1 commence à jouer, les fils de la racine dans l'arbre de jeu seront tous les états qu'on peut atteindre en jouant l'un des coups du joueur 1.
- Pour un nœud quelconque de l'arbre, ses fils sont déterminés par les coups possibles du joueur dont c'est le tour.
- Les feuilles de l'arbre de jeu correspondent à des états à partir desquelles il n'y a plus de coups possibles, c'est-à-dire que la partie est terminée et qu'on connaît qui a gagné ou bien si les joueurs ont fait match nul.
- Sur chaque feuille, on peut noter une valeur correspondant aux gains (*utility* sur le dessin ci dessus). Dans un jeu à deux joueurs, on peut par exemple prendre 0 pour match nul, +1 pour une victoire du premier joueur et −1 pour une victoire du second joueur.

Stratégie.

- Une stratégie est une méthode qui permet a une joueur de choisir son prochain coup (c'est une fonction qui, étant donné un état du jeu, retourne un coup possible : c'est ce qu'on va implémenter en TP).
- Un joueur a une *stratégie gagnante* si il a une stratégie qui lui permet de toujours gagner, et ce quels que soient les coups de l'adversaire.
- Un joueur a une *stratégie nulle* si il dispose d'une stratégie qui lui permet toujours de ne pas perdre (soit gagner, soit faire match nul), et ce quels que soient les coups de l'adversaire.

Proposition 1 (sur les stratégies). *Dans un jeu minimax, si un joueur a une stratégie gagnante, alors*

- *il a aussi une stratégie nulle,*
- *mais, son adversaire ne peux pas avoir de stratégie nulle.*

Dans un jeu minimax, si un joueur n'a pas de stratégie nulle, alors son adversaire a une stratégie gagnante.

Que se passe-t-il si les deux joueurs jouent parfaitement ? L'*algorithme minimax* vu en cours permet de déterminer la meilleure stratégie possible pour le joueur qui commence (le premier joueur), quelle que soit la stratégie de l'autre joueur, et donc en particulier quand ce second joueur joue parfaitement.

Théorème 1 (minimax). *Dans un jeux minimax, seulement deux cas sont possibles :*

- *soit l'un des joueurs a une stratégie gagnante ; ou bien,*
- *soit les deux joueurs ont tous les deux une stratégie nulle.*

De plus, la stratégie du premier joueur est déterminée par l'algorithme minimax.

L'algorithme minimax. On fait remonter les valeurs dans l'arbre de jeu depuis les feuilles vers la racine.

1. La valeur d'une position où le premier joueur doit jouer le prochain coup est obtenue en prenant le **maximum** des valeurs des positions suivantes.
2. La valeur d'une position où l'autre joueur doit jouer le prochain coup est obtenue en prenant le **minimum** des valeurs des positions suivantes.

On arrête lorsque la valeur de la racine est connue. Si c'est 0, les deux joueurs ont une stratégie nulle, si c'est $+1$ alors le premier joueur a une stratégie gagnante, si c'est -1 alors c'est son adversaire qui a une stratégie gagnante.

3 Exercices à rédiger pendant le TD

Exercice 1. Les arbres.

1. Démontrez qu'un arbre ayant au moins deux sommets a forcément au moins une feuille.

2. Démontrez les assertions suivantes.

i. Deux sommets distincts d'un arbre sont reliés par exatement une chaîne.

ii. Enlever une arête quelconque à un arbre le déconnecte

iii. Ajouter une arête quelconque à un arbre crée un cycle

3. Démontrez que si un graphe vérifie les trois propriétés de la question précédente, alors c'est un arbre. C'est-à-dire, Si G est un graphe avec au moins deux sommets tel que,
- deux sommets distincts de G sont reliés par exactement une chaîne ;
- enlever une arête quelconque de G le déconnecte ; et,
- ajouter une arête quelconque à G crée un cycle,

alors G est un arbre.

4. Montrez qu'un arbre à n sommets avec $n \geq 1$ a exactement $n - 1$ arêtes.

Exercice 2. Puissance 2.

On se penche sur le jeu de *Puissance 2*. On y joue sur $2 \times 2 = 4$ cases ; et, pour gagner, un joueur doit aligner 2 de ses pions verticalement, horizontalement ou diagonalement. Notons qu'il s'agit d'une variante du célèbre jeu *Puissance 4*, et que pour placer un pion le joueur dont c'est le tour choisit une colonne qui n'est pas pleine et que les pions tombe par gravité sur la case libre la plus basse.

1. Dessinez l'arbre de jeu.

2. Sans appliquer minimax, montrez que le second joueur n'a ni une stratégie nulle, ni une stratégie gagnante.

3. En déduire que le premier joueur a une stratégie gagnante.

4. Appliquer Minimax.

5. Montrez qu'on peut se ramener à un arbre de jeu deux fois plus petit.

Exercice 3. Arbre de jeu du morpion.

1. Soit A l'arbre de jeu du morpion (partiellement dessiné page 2). Combien la racine a-t-elle de fils ?

2. Et les fils de la racine ?

3. Si la racine est au niveau 0 de l'arbre, ses fils au niveau 1 et ainsi de suite, combien de sommets y-a-t-il dans l'arbre A sur les cinq premiers niveaux ?

4. Montrez qu'il y a au plus 362 880 parties de morpion différentes.

5. Majorez les sommets de A par 986 410.

6. Bornez le nombre de sommets de l'arbre de jeu du morpion.

7. Qu'est-ce-qu'un *état du jeu* pour le jeu du morpion ?

8. Montrez qu'il y a au plus 19 683 états possibles au morpion ?

9. Montrez qu'il existe des sommets de l'arbre correspondant au même état du jeu.

10. Expliquez comment on peut se ramener à un arbre de jeu où la racine a 3 fils seulement. Au plus combien de sommets aura ce nouvel arbre ?

Exercice 4. Jeu de Nim

1. Le jeu de Nim est un jeu très ancien qui se joue avec des allumettes, des jetons, des cailloux, etc. Les règles possèdent de multiples variantes. En voici une version très simple :
   - Au départ, on dispose d'un tas de 5 allumettes.
   - À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes.
   - Le vainqueur est celui qui enlève la (ou les) dernière(s) allumette(s).

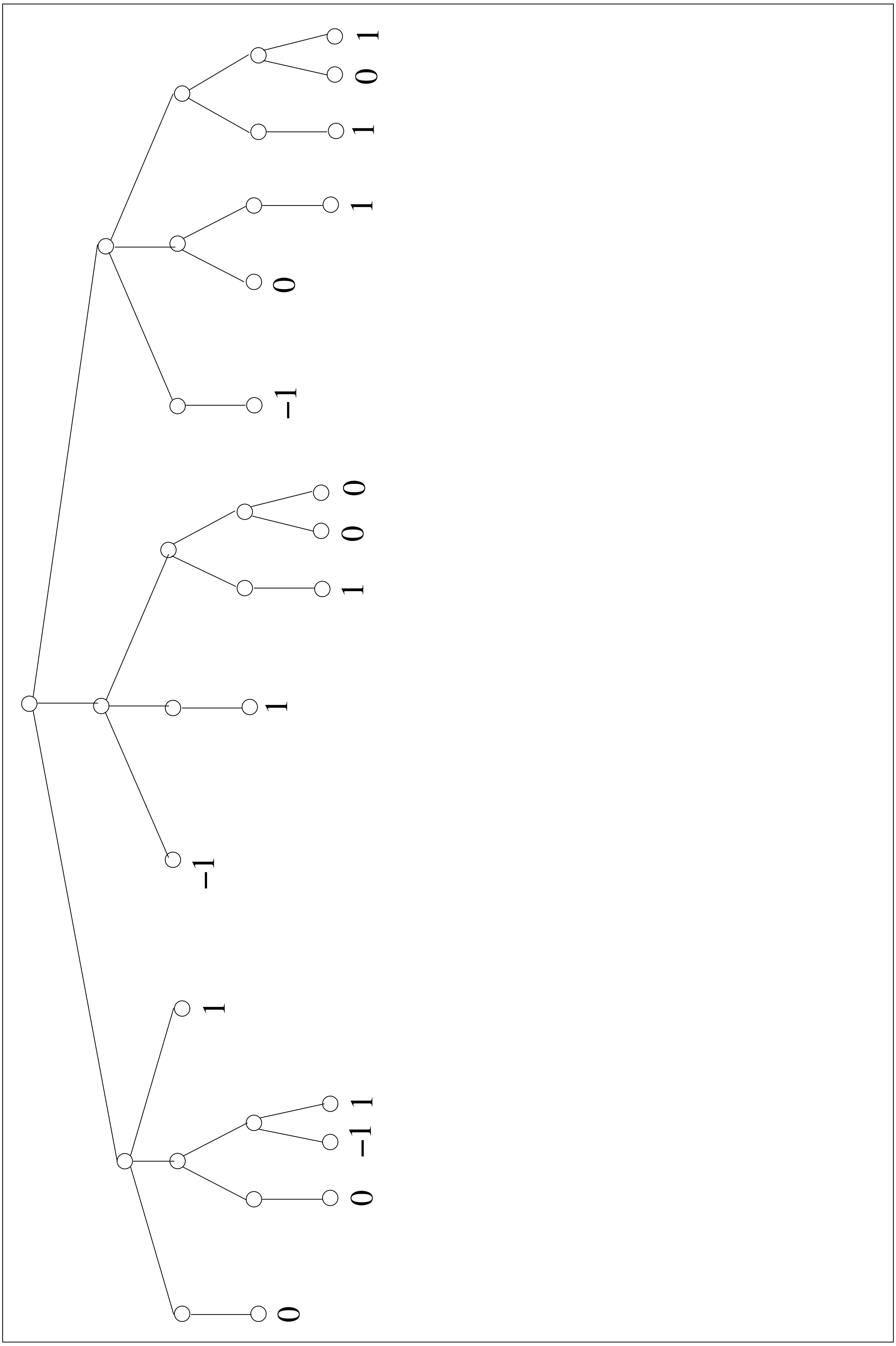
   Montrez que dans cette version du jeu de Nim, le premier joueur possède une stratégie gagnante. Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 5. Minimax.

On s'intéresse à l'arbre de jeu page suivante. La rétribution est indiquée pour chaque feuille, avec la convention que 1 représente une partie gagnée par le premier joueur, -1 une partie gagnée par le second joueur et 0 représente un match nul.

1. Déterminez le meilleur coup pour le premier joueur. Justifiez votre réponse. Illustrez votre propos sur l'arbre et indiquez la méthode utilisée.

2. Le premier joueur possède-t-il une stratégie gagnante ? Justifiez votre réponse.


0
0
−1
1
1
−1
1
1
0
0
−1
0
1
1
0
1