Formes normales, calcul

1. On considère le connecteur logique $\oplus$ appelé "ou exclusif" :

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Que représente $\neg(p \oplus q)$? Comparer avec $p \oplus \bar{q}$.
   Exprimer $\oplus$ à l'aide de $\wedge$, $\vee$ et $\neg$.
   Que valent $p \oplus 0$ et $p \oplus 1$? $p \oplus p$?
   Montrer que $\oplus$ est commutatif et associatif.
   Montrer que $1 \oplus 0 \oplus \ldots = 0$ ssi le nombre des 1 dans la somme est pair.

2. On considère les deux connecteurs $\uparrow$ (NAND) et $\downarrow$ (NOR) suivants :

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

   Exprimer $\uparrow$ et $\downarrow$ à l'aide de $\neg$ et $\vee$.
   Montrer que $\uparrow$ et $\downarrow$, séparément, suffisent à exprimer tous les autres.
   Sont-ils commutatifs ? associatifs ?

3.

p	0	0	0	0	1	1	1	1
q	0	0	1	1	0	0	1	1
r	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	1	0	1	1

   Donner les formes canoniques disjonctive et conjonctive de la forme f dépendante de 3 variables p, q et r qui a pour table de vérité

4. Déterminer, **par le calcul**, les formes canoniques disjonctives des formes propositionnelles (de 3 variables) suivantes :

$$pq \vee \bar{p}r \qquad pqr \vee \bar{p}\bar{r} \qquad p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$$

   En déduire les formes canoniques conjonctives.

5. Donner la forme normale algébrique pour l'exercice 3, en utilisant un système.

6. On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes (a et b) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :

   (a) Il y a au moins un bateau sur la ligne b.
   (b) Il y a au moins un bateau sur la ligne a.
   (c) Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.
   (d) Il n'y a pas de bateau en (b, 1).
   (e) S'il y a un bateau sur la ligne a, alors il n'y en a pas en (b, 3).

   En notant x_i l'information :

   "il y a un bateau en position (x, i)"

   pour $x \in \{a, b\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, modélisez par une formule du calcul propositionnel les cinq affirmations ci-dessus, simplifiez au maximum la formule obtenue puis dessinez les modèles correspondants.

Raisonnement

1. Soit n un entier. Montrer que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est encore un entier.

   [indication : utiliser un raisonnement par cas]

   Pour les plus motivés, montrer que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   est encore entier.

2. Montrer que l'équation

$$x^3 + x - 3 = 0$$

   n'a pas de solution entière.

   [indication : utiliser un raisonnement par l'absurde]

3. Un rectangle a pour aire 170 m^2. Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m.

4. Soient a et b deux réels. On considère la proposition

   Si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

   (a) Quelle est la contraposée de cette proposition ?
   (b) Démontrer la proposition ?
   (c) La réciproque est-elle vraie ?

5. Soit n un entier positif. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.