

Fonctions polynomiales réelles

R1.07 - Outils mathématiques

monnerat@u-pec.fr 

6 décembre 2024

IUT de Fontainebleau

Définitions

Opérations

Division euclidienne et racines

Dérivation et racines multiples

Racines d'une fonction polynôme entière

Définitions

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction polynomiale (fonction polynôme) s'il existe un entier naturel n et des nombres réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

.

Les fonctions polynômes sont des **combinaisons linéaires** des fonctions $x \rightarrow x^k$.

Exemples : Les fonctions suivantes sont-elles polynomiales ?

- $x \rightarrow \pi x^2 - 3x + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme.
- $x \rightarrow (2x - 5)^4$ est une fonction polynôme (pourquoi?).
- $x \rightarrow |x|$?? on ne sait pas pour l'instant.
- $x \rightarrow \cos x$?? on ne sait pas pour l'instant.

Théorème d'unicité

Soient $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors on a le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Preuve : récurrence sur n .

- $n = 0$. évident.
- on suppose la propriété vraie pour n . Montrons-la pour $n + 1$

Posons $p(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = p(2x) - 2^{n+1}p(x) = \sum_{i=0}^{i=n} (2^i - 2^{n+1})a_i x^i$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\forall i \leq n, (2^i - 2^{n+1})a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

Il vient donc $0 = p(x) = a_{n+1}x^{n+1}$ pour tout x , d'où $a_{n+1} = 0$.

Les coefficients d'une fonction polynôme sont uniques. Plus exactement,

Unicité des coefficients

Pour toute fonction polynôme p non identiquement nulle, il existe un unique entier n et une unique liste (a_0, a_1, \dots, a_n) telle que

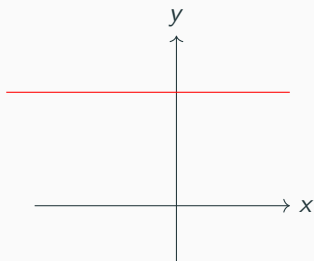
$$a_n \neq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i$$

Avec les notations du corollaire,

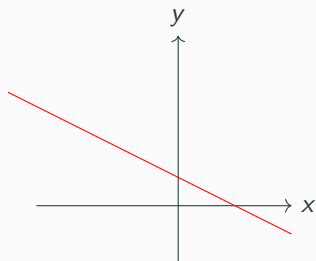
- le degré de p est l'entier n . On le note $\deg p$.
- par convention, le degré de la fonction nulle est $\deg 0 = -\infty$.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales, et $\mathbb{R}_n[x]$ celles de degré $\leq n$.

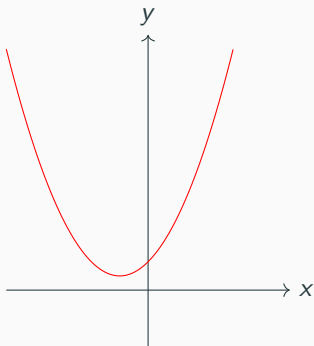
degré 0 : $f(x) = a$



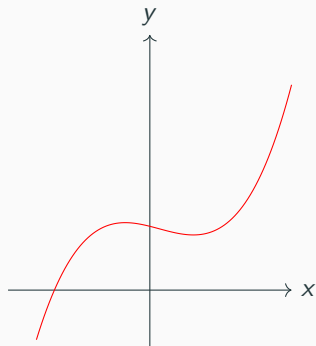
degré 1 : $f(x) = ax + b$



degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$



degré 3 : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Opérations

L'ensemble des fonctions polynômes est stable par somme, produit, et produit par une constante.

En particulier, pour p, q polynômes, et a un réel non nul :

- $\deg p + q \leq \max(\deg p, \deg q)$
- $\deg a.p = \deg p$
- $\deg pq = \deg p + \deg q$

C'est encore vrai avec le polynôme nul, en convenant que

$$\max(a, -\infty) = a \text{ et } a + -\infty = -\infty$$

Division euclidienne et racines

Théorème

Soient a et b deux polynômes ($b \neq 0$). Alors il existe un unique couple (q, r) de polynômes qui vérifie

$$a = bq + r \text{ et } \deg r < \deg b$$

- q est le quotient, et r le reste de la division euclidienne de a par b .
- Lorsque $r = 0$, on dit que b **divise** a .

Le plus simple pour la preuve est de donner l'algorithme de division :

Exemple

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\ - & \hline 6x^3 - 6x^2 + 6x & 6x + 4 \\ \hline & 4x^2 - 5x + 3 \\ - & \\ & 4x^2 - 4x + 4 \\ \hline & -x - 1 \end{array}$$

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 - x + 1) \underbrace{(6x + 4)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(-x - 1)}_{\text{reste}}$$

Remarque : on pourrait procéder "à l'envers", en cherchant q et r par résolution d'un système obtenu par identification.

$a \in \mathbb{R}$ est une racine de p si $p(a) = 0$

Factorisation

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. a est racine de p
2. il existe un polynôme q tel que $p = (x - a)q(x)$ ($(x - a)$ divise p)

Preuve : on effectue la division euclidienne de p par $(x - a)$. Il existe donc un polynôme q et un polynôme r tels que

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

avec $\deg r < 1$. C'est donc une constante.

Ainsi, $p(a) = 0 \Leftrightarrow r(a) = 0 \Leftrightarrow r = 0$, d'où le théorème.

Un polynôme p de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes.
(récurrence sur n)

Un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.

Dérivation et racines multiples

Dérivée d'un polynôme

Soit $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré n . On définit la fonction polynôme dérivée de p le polynôme de degré $n - 1$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k$$

Remarques :

- C'est une notion purement formelle, même si vous savez qu'elle coïncide avec la dérivée des fonctions en analyse.
- On retrouve les mêmes propriétés, à savoir :
 1. $(p + q)' = p' + q'$
 2. $(\lambda.p)' = \lambda.p'$
 3. $(p.q)' = p'q + pq'$
 4. $p(x) = (x - a)^n \Rightarrow p'(x) = n(x - a)^{n-1}$

Soit p une fonction polynomiale. On dit que a est une racine de multiplicité m s'il existe un polynome q tel que

$$p(x) = (x - a)^m q(x) \text{ et } q(a) \neq 0$$

Cela revient à dire que m est la plus grande puissance telle que $(x - a)^m$ divise p .

Caractérisation avec la dérivée

$$p(a) = p'(a) = \dots = p^{(n-1)}(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)^n \text{ divise } p$$

Démonstration

On montre cette équivalence par récurrence.

Pour $n = 0$, théorème déjà vu sur les racines.

On suppose l'équivalence vraie pour n . On va la montrer pour $n + 1$.

Sens direct. Soit p tel que $p(a) = \dots = p^{(n)}(a) = 0$. En effectuant la division euclidienne de p par $(x - a)^{n+1}$, on a

$$p(x) = (x - a)^{n+1}q_1(x) + r(x) \text{ avec } \deg r < n + 1$$

D'où

$$p'(x) = (x - a)^n[(n + 1)q_1(x) + (x - a)q_1'(x)] + r'(x) \text{ avec } \deg r' < n$$

Or p' vérifie l'hypothèse de récurrence au rang n , car

$$p'(a) = \dots = p'^{(n-1)}(a) = 0. \text{ Donc } (x - a)^n \text{ divise } p'(x).$$

On en déduit que $r' = 0$, et donc r est constant. Comme a est racine de p , a est racine de r , donc $r = 0$

Sens réciproque. On suppose que $(x - a)^{n+1}$ divise p .

$$p(x) = (x - a)^{n+1}q(x)$$

En dérivant, on obtient facilement que $(x - a)^n$ divise $p'(x)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$p'(a) = \dots = p'^{(n-1)}(a) = 0$$

ce qu'on réécrit

$$p'(a) = \dots = p^{(n)}(a) = 0$$

Et comme $(x - a)^{n+1}$ divise p , on a aussi $p(a) = 0$, ce qui achève la récurrence.

Formule de Taylor

Soit p un polynôme. On a la formule de Taylor en un point $a \in \mathbb{R}$ quelconque

$$\forall x, p(x) = \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Preuve : on forme q la différence

$$q(x) = p(x) - \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

qui est un polynôme de degré au plus celui de p .

En dérivant un nombre de fois quelconque (Faites-le), on a

$$\forall i, q^{(i)}(a) = 0$$

q est donc nul d'après le théorème précédent.

Exemple

Soit $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 10$.

La formule de Taylor au point 1 donne :

- $p(1) = -5$
- $p'(x) = 12x^2 - 4x + 3$, $p'(1) = 11$
- $p^{(2)}(x) = 24x - 4$, $p^{(2)}(1) = 20$
- $p^{(3)}(x) = 24$, $p^{(3)}(1) = 24$

$$\begin{aligned}p(x) &= -5 + 11(x - 1) + \frac{20}{2}(x - 1)^2 + \frac{24}{6}(x - 1)^3 \\ &= -5 + 11(x - 1) + 10(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3\end{aligned}$$

Racines d'une fonction polynôme entière

Théorème

Si $r = \frac{b}{c}$ irréductible est une racine du polynôme à coefficients entiers

$$p(x) = sx^n + \dots + t$$

Alors b divise t et c divise s .

Application : factorisez $p(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

Les racines rationnelles $\frac{b}{c}$ possibles

- b diviseur de 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- c diviseur de 1 : ± 1

Ce qui donne les racines possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$p(-1) = 1 + 7 + 17 + 17 + 6 = 48$$

$$p(1) = 1 - 7 + 17 - 17 + 6 = 0. \quad 1 \text{ est racine de } p.$$

Factorisons p par $(x - 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 & x - 1 \\
 -x^4 + x^3 & \hline
 \hline
 -6x^3 + 17x^2 & \\
 6x^3 - 6x^2 & \\
 \hline
 11x^2 - 17x & \\
 -11x^2 + 11x & \\
 \hline
 -6x + 6 & \\
 6x - 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x - 1)q(x)$$

On recommence sur $q(x)$

On a la même liste de racines possibles. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Ca ne peut pas être -1 (pourquoi?)

$$q(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0.$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
 \hline
 -x^3 + x^2 & x^2 - 5x + 6 \\
 \hline
 -5x^2 + 11x & \\
 5x^2 - 5x & \\
 \hline
 6x - 6 & \\
 -6x + 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$p(x) = (x - 1)q(x) = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 6)$. Il reste à essayer de factoriser $x^2 - 5x + 6$ qui est de degré 2.

On sait le faire (comment?)

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Finalement

$$p(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)$$

1 est une racine double, 2 et 3 sont des racines simples.