

TD n° 2 : Systèmes linéaires

1. (a) Vérifier si les matrices (augmentées) suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
- (b) Identifier les inconnues principales et les inconnues secondaires (paramètres).
- (c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pour chacun des systèmes suivants :

- (a) Écrire la matrice augmentée.
- (b) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.
- (c) Identifier les inconnues principales et les paramètres, et écrire la solution générale.

$$\text{i. } \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = -8 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\text{iv. } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{v. } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Trouver un polynôme p tel que $p(-3) = 4$, $p(-1) = 2$, $p(1) = 8$, $p(2) = 14$.
4. Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas horizontal : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres à l'heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois.
 - (a) Quelle est la distance d'Issy à Labat ?
 - (b) Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres à l'heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les trois longueurs : de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est à plat.