Introduction à la logique

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

12 septembre 2024

IUT de Fontainebleau

Partie 2

Formes normales, simplification

1. Formes Normales
   - Forme normale disjonctive (FND)
   - Forme normale conjonctive
   - Forme normale algébrique

2. Ecriture polynômiale
   - Définitions
   - Ecritures minimales
   - Simplification avec Karnaugh

Formes Normales

Formes Normales

Forme normale disjonctive (FND)

Minterme

minterme

Un minterme est un monôme (produit, conjonction) qui fait intervenir chaque variable ou sa négation (littéral) exactement une fois. La table de vérité d'un minterme ne contient qu'un seul 1, et réciproquement.

p	0	0	0	0	1	1	1	1
q	0	0	1	1	0	0	1	1
r	0	1	0	1	0	1	0	1
$p.\overline{q}.r$	0	0	0	0	0	1	0	0

$p \wedge \neg q \wedge r = p.\overline{q}.r$ vaut 1 en 101

- Pour 3 variables, il y a exactement 8 mintermes. Pour n variables, 2^n mintermes.
- On numérote les mintermes avec leur modèle en base 2 (il faut fixer un ordre sur les variables).
- Avec 3 variables p, q, r

$$\underbrace{p\overline{q}r}_{101} = m_5 \;, \quad m_3 = \underbrace{\overline{p}qr}_{011}$$

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = \overline{p}.\overline{q} \vee \overline{p}.q \vee p.\overline{q}$$

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = \overline{p}.\overline{q} \vee \overline{p}.q \vee p.\overline{q}$$

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = \overline{p}.\overline{q} \vee \overline{p}.q \vee p.\overline{q}$$

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = \overline{p}.\overline{q} \vee \overline{p}.q \vee p.\overline{q}$$

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} f &= \overline{p}.\overline{q} \vee \overline{p}.q \vee p.\overline{q} \\ &= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \end{aligned}$$

Forme normale disjonctive

Forme normale disjonctive

Toute forme $f \not\equiv 0$ est la disjonction des mintermes correspondant aux 1 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} f &= \overline{p}.\overline{q} \vee \overline{p}.q \vee p.\overline{q} \\ &= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \end{aligned}$$

Remarque : il aussi possible de transformer une écriture quelconque d'une fp vers sa forme normale disjonctive par calcul algébrique.

Formes Normales

Forme normale conjonctive

Maxterme

Maxterme

Un Maxterme est une somme (disjonction) qui fait intervenir chaque variable ou sa négation exactement une fois. La table de vérité d'un Maxterme ne contient qu'un seul 0, et réciproquement.

p	0	0	0	0	1	1	1	1
q	0	0	1	1	0	0	1	1
r	0	1	0	1	0	1	0	1
$p \vee \overline{q} \vee r$	1	1	0	1	1	1	1	1

$p \vee \overline{q} \vee r$ vaut 0 en 010

- Pour 3 variables, il y a 8 Maxtermes. Pour n variables, 2^n Maxtermes.
- On numérote les Maxtermes avec le complément en base 2 de l'interprétation à 0 (il faut fixer un ordre sur les variables).
- Avec 3 variables p, q, r :

$$\underbrace{p \vee \overline{q} \vee r}_{1\quad 0\quad 1} = M_5 \quad M_4 = \underbrace{p \vee \overline{q} \vee \overline{r}}_{1\quad 0\quad 0}$$

Forme normale conjonctive

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Forme normale conjonctive

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f = (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$$

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f = (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$$

Forme normale conjonctive

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f = (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$$

Forme normale conjonctive

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f = (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$$

Forme normale conjonctive

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$\begin{aligned} f &= (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}) \\ &= M_3 \wedge M_1 \wedge M_0 \end{aligned}$$

Forme normale conjonctive

Forme normale conjonctive

Toute forme $f \not\equiv 1$ est la conjonction des Maxtermes correspondants aux 0 de sa table de vérité. A l'ordre près, cette écriture est unique.

Exemple

p	q	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$\begin{aligned} f &= (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}) \\ &= M_3 \wedge M_1 \wedge M_0 \end{aligned}$$

Remarque : il est aussi possible de transformer une écriture quelconque d'une fp vers sa forme normale conjonctive par calcul algébrique.

FND/FNC

On peut facilement passer d'une écriture à l'autre en remarquant que le complément d'un minterme est un Maxterme, et réciproquement.
Exemple avec trois variables p, q, r :

$$\overline{M_5} = \overline{p \vee \overline{q} \vee r} \equiv \overline{p}.q.\overline{r} = m_2$$

On passe de la FND à la FNC (et réciproquement) en utilisant le complément.

Exemple avec 3 variables p, q, r et la FND $f \equiv m_1 \vee m_2 \vee m_5 \vee m_7$:

On a donc la FND de $\overline{f}$ (les mintermes absents de celle de f)

$$\overline{f} \equiv m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6$$

D'où la FNC de f par passage au complément

$$\overline{\overline{f}} \equiv f \equiv \overline{m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6} \equiv M_7 \wedge M_4 \wedge M_3 \wedge M_1$$

Formes Normales

Forme normale algébrique

Les formes propositionnelles (ou fonctions booléennes) peuvent s'écrire comme des polynômes algébriques, dans le plus petit corps à 2 élèments $F_2 = \{0, 1\}$. L'addition et la multiplication sont définis comme cela :

$$\begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Question : quels sont les deux opérateurs logiques correspondants à ces deux lois ? Réponse : $\oplus$ (ou-exclusif) , $\wedge$ (et).

Forme normale algébrique (polynôme)

Toute forme propositionnelle admet une écriture unique sous la forme d'un polynôme, c'est à dire une somme ($\oplus$) de produit ($\wedge$).

Exemple

	p	0	0	0	0	1	1	1	1
f	q	0	0	1	1	0	0	1	1
	r	0	1	0	1	0	1	0	1
	f	1	0	1	0	0	0	0	1

Les produits possibles sont p, q, r, pq, pr, qr, pqr et le terme constant 1. Le théorème précédent affirme que f peut s'écrire

$$f \equiv a_0 \oplus a_1 p \oplus a_2 q \oplus a_3 r \oplus a_4 pq \oplus a_5 pr \oplus a_6 qr \oplus a_7 pqr, a_i \in \{0,1\}$$

- $a_0 : p = q = r = 0,\ f = 1 \Rightarrow a_0 = 1$
- $a_1 : p = 1, q = r = 0,\ f = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$
- $a_2 : p = 0, q = 1, r = 0,\ f = 1 \Rightarrow a_0 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$
- $a_3 : p = 0, q = 0, r = 1,\ f = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$
- $a_4 : p = 1, q = 1, r = 0,\ f = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$
- $a_5 : p = 1, q = 0, r = 1,\ f = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 0 \Rightarrow a_5 = 1$
- $a_6 : p = 0, q = 1, r = 1,\ f = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0 \Rightarrow a_6 = 0$
- $a_7 : p = 1, q = 1, r = 1,$
  $f = 1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \Rightarrow a_7 = 1$

$$f \equiv 1 \oplus p \oplus r \oplus pr \oplus pqr$$

Ecriture polynômiale

Ecriture polynômiale

Définitions

Forme polynomiale

On l'a déjà vu, il y a plusieurs formes logiquement équivalentes à une forme propositionnelle donnée.

$$(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \equiv \overline{p} \oplus q \equiv p \leftrightarrow q$$

- On va se limiter à une classe simple, qui n'utilisent que les connecteurs : $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.
- De plus, on ne s'intéresse qu'aux expressions ayant une écriture bien précise : écriture polynômiale

Littéral

Il s'agit d'une variable, ou de sa négation

monôme

Une fp est un monôme si elle peut s'écrire comme conjonction (produit) de littéraux.

Exemple :

$$p \wedge \neg q \wedge r, \; \neg p \wedge \neg q$$

On écrit plus simplement

$$p\overline{q}r, \; \overline{p}\,\overline{q}$$

Remarque : les mintermes sont des mônomes.

polynôme

Un polynôme est une disjonction de monômes.

Exemple :

$$p\overline{q}r \vee \overline{p}\,\overline{q}$$

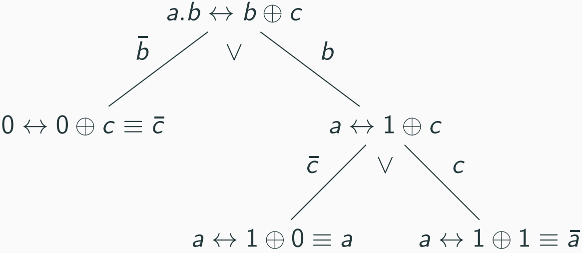
Comment obtenir une écriture polynômiale ?

Toute fp admet des écritures polynômiales.

- La forme normale disjonctive !
- Transformation par calcul algébrique.

$$
\begin{aligned}
ab \leftrightarrow b \oplus c &\equiv ab.(b \oplus c) \vee \overline{ab}.\overline{b \oplus c} \\
&\equiv ab.(b\bar{c} \vee \bar{b}c) \vee (\bar{a} \vee \bar{b}).(bc \vee \bar{b}\bar{c}) \\
&\equiv ab\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c} \vee \bar{b}\bar{c}
\end{aligned}
$$

- Méthode de Shannon : $ab \leftrightarrow b \oplus c \equiv \bar{b}\bar{c} \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}bc$



Ecriture polynômiale

Ecritures minimales

Dans l'exemple précédent, on a trouvé 2 écritures différentes :

$$ab \leftrightarrow b \oplus c \equiv ab\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c} \vee \bar{b}\bar{c} \tag{1}$$

$$\equiv \bar{b}\bar{c} \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}bc \tag{2}$$

Le terme $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ est "inutile". Sa table de vérité est déjà incluse dans le celle du terme $\bar{b}\bar{c}$ (absorption).

On dit que $\bar{b}\bar{c}$ divise $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

La deuxième écriture est "plus simple" que la première !

Ordre sur les écritures polynômiales

Plus simple que

Soit f une fp.

$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_p$ est plus simple que $f = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_q$ ssi :

- $p \leq q$
- Chaque m_i divise un M_j.

On passe de la deuxième à la première en enlevant des termes : monôme ou littéraux.

S'il n'existe pas de polynômes équivalents plus simples, on dit qu'il est minimal.

Exemple : les trois polynômes $\bar{p} \vee q$, $\bar{p} \vee pq$ et $\bar{p}\bar{q} \vee \bar{p}q \vee pq$ sont équivalents.

$\bar{p} \vee q$ est plus simple que $\bar{p} \vee pq$ qui est plus simple que $\bar{p}\bar{q} \vee \bar{p}q \vee pq$

Ecriture polynômiale

Simplification avec Karnaugh

Table de Karnaugh

Table de vérité où

- Il y a exactement une variable qui change entre deux cases adjacentes. (code de Gray)
- Les bords de la table sont adjacents.

3 variables

		ab			
		00	01	11	10
c	0				
	1				

4 variables

		cd			
		00	01	11	10
ab	00				
	01				
	11				
	10				

Table de Karnaugh

Table de vérité où

- Il y a exactement une variable qui change entre deux cases adjacentes. (code de Gray)
- Les bords de la table sont adjacents.

3 variables

c \ ab	00	01	11	10
0				
1		1		

$\bar{a}bc$

4 variables

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01			1	
11		1		
10				

$\bar{a}bcd$, $ab\bar{c}d$

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

Monômes $\rightarrow$ cellules : $\bar{b}\bar{d}$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

Monômes $\rightarrow$ cellules : $\bar{b}\bar{d}, \bar{a}cd$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1		1	1
01			1	
11				
10	1			1

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

Monômes $\rightarrow$ cellules : $\bar{b}\bar{d}$, $\bar{a}cd$, $ab\bar{d}$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1		1	1
01			1	
11	1			1
10	1			1

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

Monômes $\rightarrow$ cellules : $\bar{b}\bar{d}$, $\bar{a}cd$, $ab\bar{d}$, $ab\bar{c}d$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1		1	1
01			1	
11	1	1		1
10	1			1

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

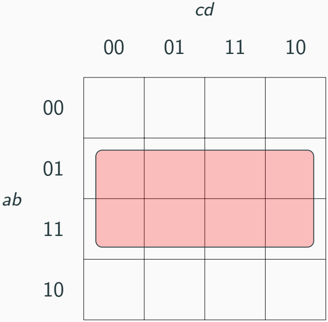
Monômes $\rightarrow$ cellules : $\bar{b}\bar{d}$, $\bar{a}cd$, $ab\bar{d}$, $ab\bar{c}d$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1		1	1
01			1	
11	1	1		1
10	1			1

- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

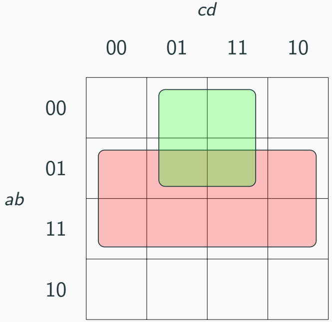
Cellules $\rightarrow$ monômes : b



- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

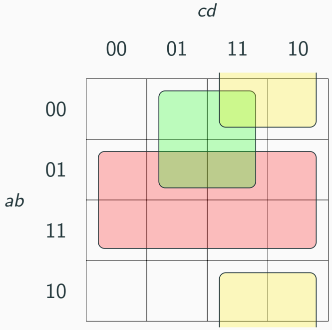
Cellules $\rightarrow$ monômes : b, $\bar{a}d$



- On appelle Cellule tout rectangle de taille $2^l \times 2^k$ du tableau.
- Les cellules correspondent exactement aux monômes sur la table de Karnaugh.

Exemple

Cellules $\rightarrow$ monômes : $b, \bar{a}d, \bar{b}c$



Implicants premiers

Ce qui suit n'est pas formalisé, on se contentera de l'aspect opérationnel !

Définition

Pour une fp f donnée, parmi les monômes plus petit que f (au sens de l'inclusion de table de vérité), les monômes maximaux sont appelés implicants premiers.

Remarques :

- Plus la table de vérité d'un monôme est grande (nombre de "1"), plus son écriture est petite.
- Les mônomes maximaux (cellules les plus grosses possibles) se repèrent visuellement sur la table de Karnaugh.

Théorème

Tout polynôme minimale d'une fp ne fait intervenir que des implicants premiers

Évident, sinon on pourrait encore simplifier l'écriture.

Simplification

On représente f par son tableau de Karnaugh. Tout polynôme synonyme de f couvre le même tableau par les cellules représentant ses monômes. Il faut donc trouver un recouvrement minimal de la table avec les implicants premiers ("grosses cellules").

Méthode :

1. On marque toutes les grosses cellules (celle qui ne sont incluses dans aucune autre). Il s'agit de choisir parmi les monômes plus petits que f ceux qui sont maximaux.
2. On garde ceux qui sont essentiels, c'est à dire ceux qui sont les seules à couvrir une case quelconque.
3. On essaye de recouvrir les cases restantes avec des cellules aussi grosses et peu nombreuses que possible.

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

$ac \backslash bd$	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11	1			1
10	1			1

Grosses cellules :

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

ac \ bd	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11	1			1
10	1			1

Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d}$

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

ac \ bd	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11	1			1
10	1			1

Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d}$

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

ac \ bd	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11	1			1
10	1			1

Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d}$

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

$ac \backslash bd$	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11	1			1
10	1			1

Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}cd$

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

ac \ bd	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11	1			1
10	1			1

Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee \bar{a}bc$

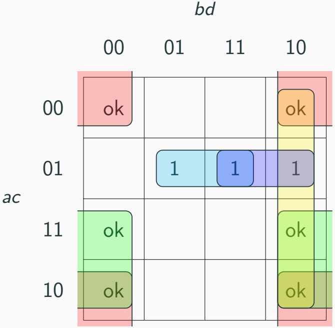
Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

ac \ bd	00	01	11	10
00	ok			ok
01		1	1	1
11	1			1
10	ok			ok

Grosses cellules : $\color{red}{\bar{c}\bar{d}} \vee \color{lime}{a\bar{d}} \vee \color{yellow}{b\bar{d}} \vee \color{cyan}{\bar{a}cd} \vee \color{blue}{\bar{a}bc}$

Cellules essentielles : $\color{red}{\bar{c}\bar{d}}$

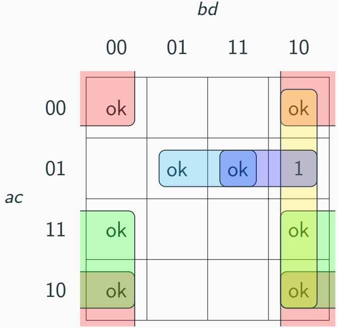
Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh



Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee \bar{a}bc$

Cellules essentielles : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d}$

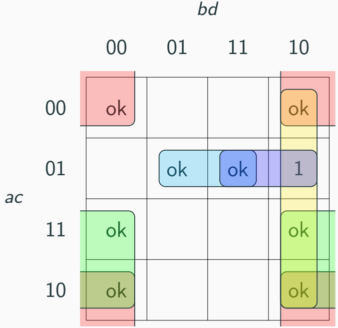
Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh



Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee \bar{a}bc$

Cellules essentielles : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee \bar{a}cd$

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh

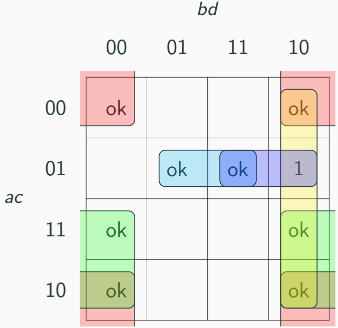


Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee \bar{a}bc$

Cellules essentielles : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee \bar{a}cd$

Il ne reste qu'une case à couvrir ! On a 2 choix possibles : soit avec $\bar{a}bc$ ou bien $b\bar{d}$.

Soit $f = \bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee ab\bar{d} \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d}$. Sa table de Karnaugh



Grosses cellules : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee b\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee \bar{a}bc$

Cellules essentielles : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee \bar{a}cd$

Il ne reste qu'une case à couvrir ! On a 2 choix possibles : soit avec $\bar{a}bc$ ou bien $b\bar{d}$.

D'où les deux écritures minimales : $\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{d} \vee \bar{a}cd \vee \left| \begin{array}{c} \bar{a}bc \\ b\bar{d} \end{array} \right.$