TD n° 1 : Calcul matriciel

1. (a) Écrire les matrices suivantes définies par leur terme général
   - $A = (a_{ij}) \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = (-1)^{i+j}$
   - $B = (b_{ij}) \in M_{3,4}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = j^{i-1}$
   - $C = (c_{ij}) \in M_{4,2}(\mathbb{R})$, $c_{ij} = i - j$

   (b) Parmi les produits suivants, dire lesquels sont définis et donner les dimensions du produit :
   $$A \times A,\ A \times B,\ A \times C, B \times A,\ B \times C, C \times A, C \times B, {}^tC \times C$$

   (c) Quelle est la taille de la matrice $D = A \times B \times C$? donner deux manières différentes de calculer D. En effectuer une. Quelle propriété de la multiplication des matrices met-on en évidence ?

   (d) Quelle est la taille de la matrice $E = {}^t(C \times A)$? Donner deux manières différentes de calculer E. En effectuer une. Quelle propriété de la multiplication des matrices met-on en évidence ?

   (e) Quelle est la taille de la matrice $F = A \times (B + E)$? Calculer de deux manières différentes F. Quelle propriété de la multiplication des matrices met-on en évidence ?

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Calculer $A^2 + 2.A.B + B^2$ et $(A + B)^2$.
   - Conclusion ?

3. Soit la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Calculer M^3.

   En déduire M^{-1}, M^9 et M^{13}.

4. Soit la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer $A^3 - A^2 + 6.A$ et exprimer le résultat en fonction de I_3.

   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de I_3, A, A^2.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) On pose $B = A - I_3$. Calculer B^n pour $n \geq 0$.

   (b) En déduire A^n pour $n \geq 0$.

   [indication : on pourra utiliser, en la justifiant, la formule du binôme de Newton]

6. On consigne les notes d'un semestre d'IUT dans une matrice M où chaque ligne représente un des 100 étudiants et chaque colonne représente une des 10 matières.

   Trouver une méthode matricielle pour calculer les moyennes semestrielles

   (a) dans chacune des matières.

   (b) de chacun des étudiants. Les coefficients des matières sont $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$.

7. Soit l'ensemble
   $$E = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\ a, b \in \mathbb{R} \}$$
   $+$ et $\times$ sont la somme et le produit matriciel.

   (a) Montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

   (b) A quelle condition un matrice de E est inversible ?

   (c) $(E \setminus \{0_E\}, \times)$ est-il un groupe commutatif ?

8. Soient les matrices
   $$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer P^{-1}.

   (b) Calculer $A = P.M.P^{-1}$.

   (c) Démontrer par récurrence que $M^n = P^{-1}.A^n.P$.

   (d) Trouver l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (e) En déduire l'expression de M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (f) Peut-on déduire de la formule précédente l'expression de M^{-1} ? Justifier.