Introduction à la logique

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

20 septembre 2024

IUT de Fontainebleau

Partie 3

Logique prédicative

Introduction

Quantificateurs

Introduction

Prédicat : introduction

Exemple 1 : Soient les deux propositions :

$$r : \text{ "il pleut" et } u : \text{ "Jean prend son parapluie"}$$

et l'implication :

$$r \to u : \text{ "s'il pleut, Jean prend son parapluie"}$$

Ce qui est vrai pour Jean l'est pour Pierre, Marie, etc.

Au lieu de créer les mêmes propositions en changeant à chaque fois le prénom de la personne (il y en a une infinité possible), on va considérer des énoncés faisant intervenir des variables représentant une personne quelconque.

$$u(x) : \text{"}x \text{ prend son parapluie" ou } w(x) : \text{"}x \text{ est mouillé"}$$

On écrira $u(\text{Jean})$, $u(\text{Marie})$, $w(\text{Pierre})$, etc.

Que "signifie" $u(x) \to \neg w(x)$?

Exemple 2 : à tout entier x, on associe la proposition

$$a(x)\ :\text{"}x \text{ est impair"}$$

$a(2)$ est faux, mais $a(3)$ est vrai.

Exemple 3 : on considère l'énoncé dépendant des variables entières x, y, z, n

$$f(x, y, z, n) : x^n + y^n = z^n$$

$f(3, 4, 5, 2) : 3^2 + 4^2 = 5^2$ est vrai.

$f(1, 2, 3, 3) : 1^3 + 2^3 = 3^3$ est faux.

Prédicat

Définition

De manière très imprécise, on appelle **prédicat** tout énoncé $p(x, y, \ldots)$ contenant des **variables** d'un certain **domaine**, tel que, quand on subsititue à chacune des variables un objet du domaine, on obtient un proposition (donc vraie ou fausse).

Remarques

- Le nombre de variables du prédicat s'appelle son poids ou son arité.
- On peut voir un prédicat d'arité n sur un domaine $\mathcal{D}$ comme une application de $\mathcal{D}^n \to \{0, 1\}$

Exemples

- $a(x, y)$: "x est divisible par y" est un prédicat à deux variables (poids 2), binaire.
- $a(x, 2)$: "x est divisible par 2" est un prédicat à une variable, unaire.
- $a(10, 3)$: "10 est divisible par 3" est un prédicat à 0 variables (poids 0). C'est une proposition.

Quantificateurs

Connecteurs et quantificateurs

Soient a et b deux prédicats définis sur un même domaine. Alors

- $\neg a$, $(a \vee b)$, $(a \wedge b)$, $(a \rightarrow b)$, $(a \leftrightarrow b)$ sont des prédicats.
- Si x est une variable "libre" de a, alors

  $$\forall x, a$$

  et

  $$\exists x, a$$

  sont des prédicats. La variable x est alors dite liée.

$\forall x$ se lit : "pour tout x", "quelque soit x" (quantificateur universel).

$\exists x$ se lit : "il existe un x (quantificateur existentiel).

Remarque : une variable liée à un connecteur n'est plus une variable du prédicat. On dit qu'elle est capturée par le quantificateur.

Sémantique des formules quantifiées

Soient les deux formules $\forall x, a(x)$ et $\exists x, a(x)$ supposées sans variables libres. On leur donne la valeur de vérité suivante :

- $\forall x, a(x)$ est vraie si et seulement si $a(x)$ est vraie pour tous les objets du domaine.
- $\exists x, a(x)$ est vraie si et seulement si $a(x)$ est vraie pour au moins un objet du domaine.

Exemple : soit le prédicat $p(x)$: $x^2 \leq 10$, sur le domaine des entiers de 1 à 5.

- $\forall x, p(x)$ est la même chose que $p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge p(4) \wedge p(5)$. C'est faux : $p(4)$ est un contre exemple.
- $\exists x, p(x)$ est ? ? car ? ?.

Formalisation du langage naturel

Exemples : trois prédicats :

$h(x)$: x est un homme, $m(x)$: x est méchant, $aime(x, y)$: x aime y

- Tous les hommes sont méchants

$$\forall x, (h(x) \to m(x))$$

- Seulement les hommes sont méchants.

$$\forall x, (m(x) \to h(x))$$

- Il existe un homme méchant.

$$\exists x, (m(x) \wedge h(x))$$

- Il existe un homme qui aime tous les hommes.

$$\exists x, (h(x) \wedge \forall y, (h(y) \to aime(x, y))$$

- Il existe une femme qui n'aime personne.

$$\exists x, (\neg h(x) \wedge (\forall y, \neg aime(x, y)))$$

Équivalences (théorèmes) ususelles

Les équivalences suivantes sont vraies pour p et q quelconques

théorème	nom
$\neg\forall x, p(x) \equiv \exists x, \neg p(x)$	De Morgan
$\neg\exists p, p(x) \equiv \forall x, \neg p(x)$	De Morgan
$\forall x \forall y\ p(x,y) \equiv \forall y \forall x\ p(x,y)$	commutativité $\forall$
$\exists x \exists y\ p(x,y) \equiv \exists y \exists x\ p(x,y)$	commutativité $\exists$
$\forall x\ (p(x) \wedge q(x)) \equiv \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$	distributivité $\forall$ sur $\wedge$
$\exists x\ (p(x) \vee q(x)) \equiv \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$	distributivité $\exists$ sur $\vee$

Exemple : soit $p = \forall x\ \exists y\ y < x$.

$$\begin{aligned} \neg p &\equiv \neg(\forall x\ \exists y\ y < x) \\ &\equiv \exists x\ \neg(\exists y\ y < x) \\ &\equiv \exists x \forall y\ \neg(y < x) \\ &\equiv \exists x\ \forall y\ y \geq x \end{aligned}$$

Question : p est-elle vraie sur les entiers naturels ? relatifs ?

Attention : en général

$$\forall x, \exists y, p \not\equiv \exists y, \forall x, p$$

Par exemple, avec $p(x, y)$: "x aime y". $\forall x, \exists y, p$ devient "toute personne aime quelqu'un", alors que $\exists y, \forall x, p$ devient "il existe une personne aimée de tous". Implication ?

$$\forall x, (p \vee q) \not\equiv (\forall x, p) \vee (\forall x, q)$$

Sur $\mathbb{N}$, avec $p(x) =$"x *est pair*" et $q(x) =$"x *est impair*". Implication ?

$$\exists x, (p \wedge q) \not\equiv (\exists x, p) \wedge (\exists x, q)$$

Sur $\mathbb{N}$, avec $p(x) =$"x *est pair*" et $q(x) =$"x *est impair*". Implication ?