Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

3 octobre 2024

IUT de Fontainebleau

Partie 2

Relations

Relations

Généralités

Vocabulaires

Propriétés

Relation d'équivalence

Relations

Relations

Généralités

Relation binaire

Soient E et F deux ensembles. Une relation binaire sur $E \times F$ est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times F$.

$$\mathcal{R} \text{ relation binaire} \Leftrightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{P}(E \times F) \Leftrightarrow \mathcal{R} \subset E \times F$$

- Lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y. on note aussi $x\mathcal{R}y$.
- Lorsque $E = F$, on parle de relation binaire sur E.
- On peut définir de manière équivalente une relation binaire à l'aide d'un prédicat binaire.

Cas particuliers :

- $\mathcal{R} = \emptyset$.
- $\mathcal{R} = E \times F$.
- L'égalité Δ sur E : $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x = y$ (notée aussi id_E).

Exemples

Soient

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

l'ensemble des élèves et

$$B = \{Math, Info, Ang, Ec\}$$

l'ensemble des cours.

On peut définir les relations suivantes :

- $\mathcal{R}$ qui décrit si un étudiant suit un cours :

$$\mathcal{R} = \{(a, Math), (a, Ec), (b, Info), (c, Ang), (d, Ang), (e, Math), (e, Ang)\}$$

- $\mathcal{S}$ décrit si un étudiant a acheté un cadeau à un autre étudiant définie par

$$\mathcal{S} = \{(b, b), (b, a), (c, a), (c, b), (a, d), (d, c)\}$$

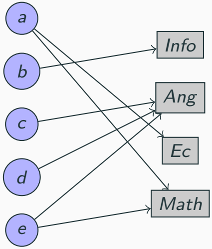
Représentations

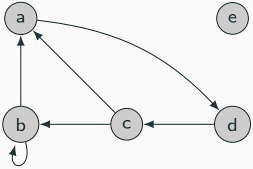
Diagramme cartésien et matrice de relation

$\mathcal{R}$	*Math*	*Ec*	*Ang*	*Info*
a	*V*	*V*		
b				*V*
c			*V*	
d			*V*	
e	*V*		*V*	

$\mathcal{S}$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a				*V*	
b	*V*	*V*			
c	*V*	*V*			
d			*V*		
e					

Diagramme sagittal





Opérations sur les relations

Les relations sont des ensembles. On a droit à inclusion, égalité, union, intersection, différence, etc.

Relation réciproque

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur $E \times F$. On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation sur $F \times E$ définie par

$$x\mathcal{R}^{-1}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

Composée de relations

Soient $\mathcal{R}$ une relation de E vers F et $\mathcal{S}$ une relation de F vers G. On définit la composée $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire de E vers G notée $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{S}\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E \times G, \quad (x\mathcal{T}y) \leftrightarrow (\exists z \in F \quad x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{S}y)$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\mathcal{R}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{S} \circ \mathcal{R}"'] & z \arrow[r, "\mathcal{S}"] & y \end{tikzcd}$$

Relations

Vocabulaires

Vocabulaire

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation. On définit :

$\forall x \in E$,

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in F, x\mathcal{R}y\}$$

(là ou arrivent les flèches qui partent de x)

$A \subset E$,

$$\mathcal{R}(A) = \cup_{x \in A} \mathcal{R}(x)$$

(là ou arrivent les flèches qui partent d'un élément de A)

Image. On note

$$\operatorname{im} \mathcal{R} = \mathcal{R}(E)$$

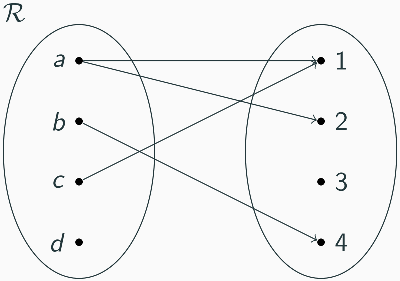
(les éléments de F où arrive une flèche)

Domaine. On note

$$\operatorname{dom} \mathcal{R} = \operatorname{im} \mathcal{R}^{-1}$$

(les éléments de E d'où part une flèche)

Exemple



$\mathcal{R}(\{a\}) = \{1, 2\}$

$\mathcal{R}(\{d\}) = \emptyset$

$\mathcal{R}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 4\} = \operatorname{im} \mathcal{R}$

$\operatorname{dom} \mathcal{R} = \{a, b, c\}$

Relations

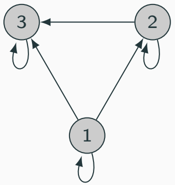
Propriétés

Réfléxité

Réflexive

Une relation $\mathcal{R}$ est réflexive ssi $\forall x \in E \; x\mathcal{R}x$

- Diagramme cartésien : la diagonale doit être pleine.
- Diagramme sagittal : chaque sommet porte une boucle.



$\mathcal{R}$	1	2	3
1	V	V	V
2		V	V
3			V

Exemples :

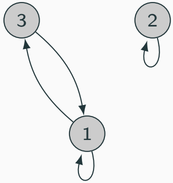
Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est réflexive. Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est réflexive, mais $<$ n'est pas réflexive.

Symétrie

Symétrie

Une relation $\mathcal{R}$ est symétrique ssi $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \leftrightarrow y\mathcal{R}x$.

- Diagramme cartésien : symétrie par rapport à la diagonale.
- Diagramme sagittal : quand une fléche va de a vers b, il y a aussi une fléche de b vers a.



$\mathcal{R}$	1	2	3
1	V		V
2		V	
3	V		

Exemples :

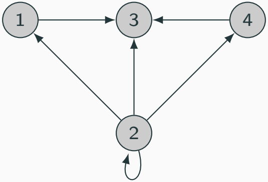
Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est symétrique. Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est n'est pas symétrique.

Transitivité

Transitivité

Une relation $\mathcal{R}$ est transitive ssi $\forall(x,y,z) \in E^3 \; x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z$

- Diagramme sagittal : tout chemin qui part d'un sommet s et va à un sommet s' en suivant la direction des fléches admet un raccourci, c'est à dire un chemin de longueur un.



	1	2	3	4
1			V	
2	V	V	V	V
3				
4			V	

Exemples : Quel que soit l'ensemble, la relation d'égalité $=$ est transitive.

Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est transitive.

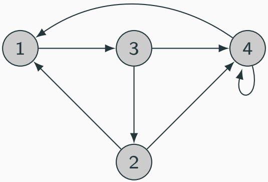
La relation "est le père de" n'est pas transitive.

Antisymétrique

Antisymétie

Une relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique ssi
$\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$

- Diagramme sagittal : les seuls aller-retours sont des boucles.



	1	2	3	4
1			V	
2	V			V
3		V		V
4	V			V

Exemples : Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ est antisymétrique.

Problème : à partir d'une relation binaire sur un ensemble E, on cherche à rajouter le minimum de couples pour que $\mathcal{R}$ acquiert une propriété donnée.

- *Fermeture reflexive* : On appelle fermeture réflexive $r(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ "la plus petite relation" (au sens de l'inclusion) réflexive contenant $\mathcal{R}$.
- *Fermeture symétrique* : On appelle fermeture symétrique $s(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ "la plus petite relation" (au sens de l'inclusion) symétrique contenant $\mathcal{R}$.
- *Fermeture transitive* : On appelle fermeture transitive $t(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ "la plus petite relation" (au sens de l'inclusion) transitive contenant $\mathcal{R}$.

Propriété : soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

- $r(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta$ avec Δ est la relation d'égalité sur E.
- $s(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$
- $t(\mathcal{R}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}^i$

Relations

Relation d’équivalence

Définition

Une relation binaire définie sur E est une relation d'équivalence ssi elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple : Par définition, pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on note $x \equiv_n y$, lire x est congru à y modulo n, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$.

$\equiv_n$ est une relation d'équivalence.

- Réflexivité $x \equiv_n x$ car $x - x = 0.n$ et $0 \in \mathbb{Z}$.
- Symétrie si $x \equiv_n y$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k.n$, on a donc $y - x = -k.n$ et $-k \in \mathbb{Z}$ d'où $y \equiv_n x$.
- Transitivité si $x \equiv_n y$ et $y \equiv_n z$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = k.n$ et $y - z = k'.n$. Ainsi $x - z = x - y + y - z = (k + k').n$. On en déduit que $x \equiv_n z$

Classes d'équivalence et partition

Classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. La classe d'équivalence d'un élément x, noté $\overline{x}$, est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x. Autrement dit

$$\overline{x} = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition

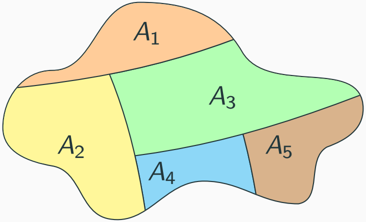
- Une classe d'équivalence n'est jamais vide.
- $\forall x, y \in E$, ou bien $\overline{x} = \overline{y}$, ou bien $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Classes d'équivalence et partition

Partition

Soit E un ensemble, la famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ indexée par I est une partition si :

- l'union des $(A_i)_{i \in I}$ est égale à E, ie $E = \cup_{i \in I} A_i$,
- deux éléments de $(A_i)_{i \in I}$ distincts sont disjoints, ie si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Théorème

Etant donnée une relation d'équivalence sur un ensemble, les classes d'équivalences forment une partition.

Exemple : classes d'équivalence de $\equiv_3$ sur $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} \\
&= 3\mathbb{Z} \\
\overline{1} &= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} \\
&= 1 + 3\mathbb{Z} \\
\overline{2} &= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\} \\
&= 2 + 3\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ensemble quotient

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E. On le note $E/\mathcal{R}$.