Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

20 septembre 2024

IUT de Fontainebleau

Partie 1

Ensembles

Définitions

Définition

D'après G.Cantor, on entend par ensemble E : le groupement en un tout d'objets déterminés et bien distincts de notre perception ou de notre entendement, et que l'on appelle les éléments de E.

Exemples :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: entiers relatifs
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\}$: rationnels
- $\mathbb{R}$ nombres réels, $\mathbb{C}$ nombres complexes, H quaternions ....

On considère primitives les notions d'appartenance et d'égalité.

- Appartenance : on écrit $x \in E$ si x est un élément de E et $x \notin E$ sinon.
- Egalité : l'écriture $x = y$ signifie que les lettres x et y désignent le même élément. On écrit $x \neq y$ sinon.

Définitions d'ensembles

Définition en extension : on cite tous les éléments, ou seulement quelques-un si le reste se déduit facilement. **L'ordre d'écriture est arbitraire et chaque élément n'y figure qu'une seule fois**.

- $E = \{\} (= \emptyset)$, $E = \{a\}$ singleton, $E = \{a, b\}$ paire.
- $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} (= [\![0, 7]\!])$.
- $E = \{0, 1, 2, \ldots\} (= \mathbb{N})$.

Définition en compréhension : soit E un ensemble. On définit une partie A à l'aide d'une propriété (un prédicat) vérifiée par certains éléments de E. On note :

$$A = \{x \in E \mid p(x)\}$$

A est l'ensemble des x appartenant à E tels que $p(x)$ est vrai.

- $E = \mathbb{N}$ et $p(x)$: x est nombre un pair.
  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \ est\ pair\} = \{0, 2, 4, \ldots\} = 2\mathbb{N}$
- $E = \mathbb{Z}$ et $p(x)$: $x^2 = 3x - 2$. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3x - 2\} = \{1, 2\}$

Comparaison d’ensembles

Inclusion, égalité

Ensemble vide : un ensemble ne contenant aucun élément est dit vide. Il n'y en a qu'un, noté $\emptyset$.

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

Sous-ensemble : un ensemble A est un sous-ensemble de E si A est composée d'éléments de E. On écrit alors $A \subset E$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

Exemples :

- $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$
- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ mais $a \in \{a, b, c\}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Egalité : deux ensembles E et F sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments . On note $E = F$. On a :

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \wedge F \subset E$$

Attention

Un objet peut être à la fois un élément et une partie d'un ensemble !

Par exemple,

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

et

$$\emptyset \subset \{\emptyset\}$$

Ou encore

$$\{1\} \in \{1, \{1\}\}$$

et

$$\{1\} \subset \{1, \{1\}\}$$

Opérations ensemblistes

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$P(E) = \{\ \emptyset\ , \{a\}\ ,\ \{b\}\ , \{c\}\ , \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Opérations ensemblistes

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$P(E) = \{\ \emptyset\ , \{a\}\ ,\ \{b\}\ , \{c\}\ , \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Remarque : on peut coder chaque partie par un mot binaire. Chaque bit indique l'appartenance de l'élément correspondant à la position du bit.

Opérations ensemblistes

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$P(E) = \{\ \emptyset\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

$$codage = \ 000\ 100\quad 010\quad 001\quad 110\quad 101\quad 011\quad 111$$

Remarque : on peut coder chaque partie par un mot binaire. Chaque bit indique l'appartenance de l'élément correspondant à la position du bit.

Opérations ensemblistes

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$P(E) = \{\ \emptyset\ , \{a\}\ , \ \{b\}\ , \{c\}\ , \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$codage = \ 000\ 100\quad 010\quad 001\quad 110\quad 101\quad 011\quad 111$$

Remarque : on peut coder chaque partie par un mot binaire. Chaque bit indique l'appartenance de l'élément correspondant à la position du bit.
Corrolaire : si E possède n éléments, $\mathcal{P}(E)$ en possède 2^n.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Différence :

$$A - B = A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \land x \notin B\}$$

Complémentaire :

$$E \setminus A = \overline{A}^{E} = \{x \in E | x \notin A\}$$

Union :

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \lor x \in B\}$$

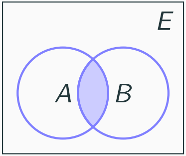
Intersection :

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \land x \in B\}$$

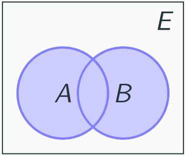
Différence symétrique :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

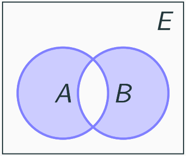
$A \cap B$



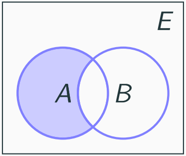
$A \cup B$



$A \Delta B$



$A \setminus B$



$\overline{A}$

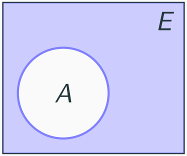
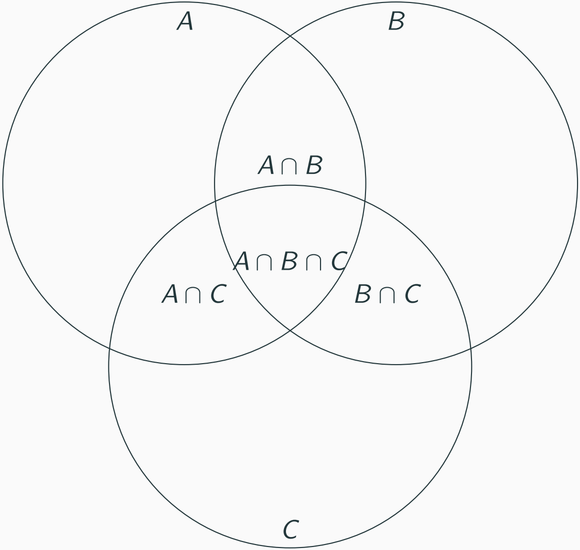


Diagramme de Venn



Propriétés algébriques

Idempotence	$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
Commutativité	$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cup A$
Associativité	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Eléments neutre	$A \cap E = A \quad A \cup \emptyset = A$
Eléments absorbants	$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup E = E$

Produit cartésien

Définition : Soient E et F deux ensembles. Tous les couples ordonnées (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$ constituent un ensemble appelé produit cartésien de E et F. On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

- Exemple avec $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

- Exemple avec $E = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$ et $F = \{\diamondsuit, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

$$\begin{aligned} E \times F = \{&(7, \diamondsuit), (8, \diamondsuit), \ldots, (A, \diamondsuit), (7, \heartsuit), (8, \heartsuit), \ldots, (A, \heartsuit), \\ &(7, \clubsuit), (8, \clubsuit), \ldots, (A, \clubsuit), (7, \spadesuit), (8, \spadesuit) \ldots, (A, \spadesuit)\} \end{aligned}$$

Ne pas confondre (x, y) (couple) et $\{x, y\}$ (paire)

Une implantation de la notion de couple à partir de la théorie des ensembles a été proposée notamment par Kuratowski avec

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Remarques :

- Les éléments x et y s'appellent les composantes du couple.
- $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

Le produit cartésien se généralise à un nombre d'ensembles quelconque (même infini !) :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, \ldots, e_n),\ e_i \in E_i \,\forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Exemple : pour le système de codage des couleurs RGB (Red, Green, Bleu), une couleur est un élément de

$$[0, 255] \times [0, 255] \times [0, 255] = [0, 255]^3$$

On peut définir des sous-ensembles de couleurs $\{(r, g, b) : g \geq \frac{4}{5}(r + b)\}$