Rappels

unique.

- E ensemble fini $\Longleftrightarrow$ E bijection avec $\{1,2,3,\dots,k\}$
  $k = \mathrm{card}(E)$

Th : $f : E \longrightarrow F$ $\quad E, F$ finis

f injective $\Rightarrow$ $\mathrm{card}\, E \leq \mathrm{card}\, F$
surjective $\Rightarrow$ $\mathrm{card}\, E \geq \mathrm{card}\, F$
bijective $\Rightarrow$ $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$

- $\{f : E \longrightarrow F\} = F^E \quad \mathrm{card}(F^E) = \mathrm{card}\, F^{\mathrm{card}\, E}$
  $\{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c,d\} \quad 4^3$
- $\mathcal{P}(E) \quad \mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}$
- $\mathfrak{S}(E)$ permutation de E (bijection $E \longrightarrow E$)

$$\mathrm{card}(\mathfrak{S}(E)) = \mathrm{card}\, E\, !$$

$n \longrightarrow n!$

- injection de $\{1, \dots p\} \longrightarrow \{1, \dots n\}$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

$\boxed{p\text{-uplet}}$ avec n éléments

Combinaisons $\binom{n}{k}$ C_n^k

ensemble des parties à k éléments parmi n.

- $\underbrace{C_n^k = C_n^{n-k}}$ φ : $P(E) \longrightarrow P(E)$, $A \longrightarrow \overline{A}$

φ est bijective

partie à k éléments $\xrightarrow{\varphi}$ partie à $n-k$ éléments

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\boxed{C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}}$$

$\{1, \ldots, n+1\}$

partition

$C_n^{k-1} \to \{1\} \cup A$ + $\cancel{\{1\}} \cup A \leftarrow C_n^k$

triangle de PASCAL

k

$n \longrightarrow$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$n = 5 \longrightarrow$ 1 5 10 10 5 1

$k = 3$ $C_5^3 = 10$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Formule du binôme de Newton

$\boxed{ab = ba}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Preuve par Réc

$$1 \times 1 \times 1$$

• $n = 0$ $(a+b)^0 = 1 \overset{?}{=} C_0^0 a^0 b^0 = 1$

• $n \to n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n$$

$$= a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

Hyp

$$= a \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$l = k+1$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} a^l b^{\overbrace{n-(l-1)}^{n+l-1}} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\left(C_n^{l-1} + C_n^l\right)}_{C_{n+1}^l} a^l b^{n+1-l} + C_n^n a^{n+1} + C_n^0 b^{n+1}$$

$$C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} \quad C_{n+1}^0 b^{n+1}$$

$$= \boxed{\sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l a^l b^{n+1-l}}$$

Ensembles infinis — Cantor

déf : E infini dénombrable $\Leftrightarrow$ E bijection avec $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ | & | & | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}\right) \text{ bijection} \quad \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$$

$2\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \\ | & | & | & | & | & | & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \frac{n}{2} \end{array} \quad \text{bijection}$$

$\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & | & | & | & | & | & | & | & | & | & \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x > 0 & 2(x-1)+1 \\ x \leq 0 & -2x \end{cases} \end{array} \quad \text{bijection}$$

Cantor (1887)

$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ bijection

$(x,y) \longrightarrow 2^y(2x+1)-1$

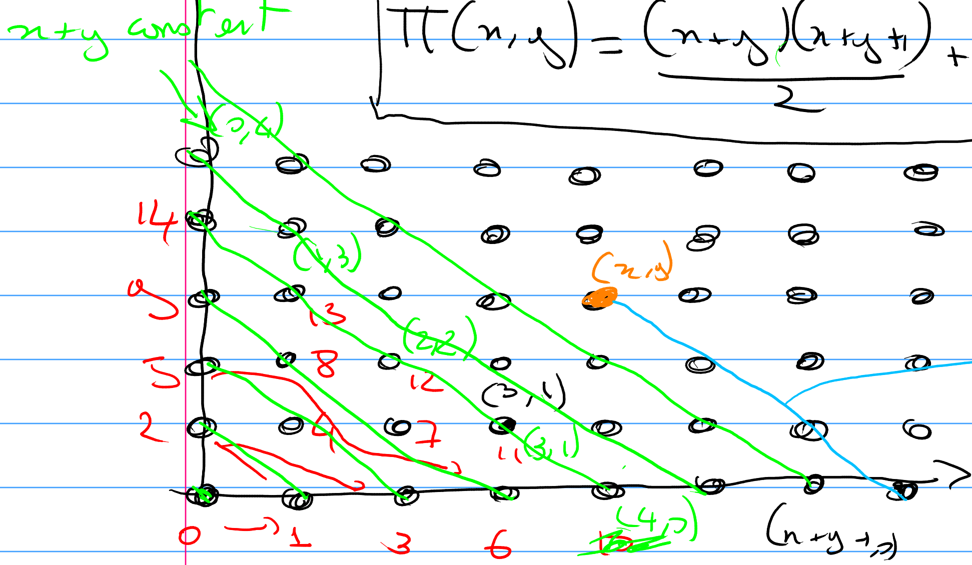
$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Couplage de Cantor

$\underbrace{(t,0) \longrightarrow (0,t)}_{t+1}$ diagonale

$$\boxed{\pi(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y}$$

$\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$



$\mathbb{N}$ $(x+y,0)$

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad x+y} = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y \cancel{+1}$$

" infini qui sont + grand $\mathbb{N}$ "

$\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(P(E))$

$n \qquad 2^n$

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(P(\mathbb{N}))$

$\aleph_0 \qquad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ensemble des réels

$\boxed{\text{Cantor}}$

$\mathbb{R}$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$

diagonale de Cantor

$[0,1[$ bijection avec $\mathbb{N}$? f bijection

$0 \leq x < 1$

développement en base $\underline{\underline{2}}$

$$f(0) = 0,\underline{b_{00}}\, b_{01}\, b_{02}\, b_{03}\, b_{04} \ldots$$
$$f(1) = 0,b_{10}\, \underline{b_{11}}\, b_{12}\, b_{13}\, b_{14} \ldots$$
$$f(2) = 0,b_{20}\, b_{21}\, \underline{b_{22}}\, b_{23}\, b_{24} \ldots$$
$$f(3) = 0,b_{30}\, b_{31}\, b_{32}\, \underline{b_{33}}\, b_{34} \ldots$$
$$\vdots$$
$$f(n) = 0,b_{n0}\, b_{n1}\, b_{n2} \ldots$$
$$\vdots \qquad a_i = 1 - b_{ii} \qquad (0 \leftrightarrow 1)$$

$$\alpha = 0,a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$\boxed{\alpha \text{ n'est pas dans la liste}}$

Goedel

Conclusion : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

$$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Hypothèse du continu

$\underline{\aleph_1}$