Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

3 octobre 2024

IUT de Fontainebleau

Partie 3

Ordre

Relations d'ordre

Induction

Relations d’ordre

Définition

Définition

Une relation binaire $\leq$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique. Autrement dit :

- $\leq$ réflexive $\forall x \in E, x \leq x$.
- $\leq$ transitive $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$.
- $\leq$ antisymétrique $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$.

Un ordre est total si pour tous éléments $x, y \in E$ ona $x \leq y$ ou $y \leq x$. Sinon, l'ordre est dit partiel.

Exemples d'ordres sur les nombres

Ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{N}$ défini par

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, y = k + x$$

- réflexive : $x = x + 0 \Rightarrow x \leq x$
- transitive :

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge y \leq z &\Rightarrow y = k + x \wedge z = k' + y \\ &\Rightarrow z = k' + (k + x) = (k + k') + x \\ &\Rightarrow x \leq z \end{aligned}$$

- antisymétrie :

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge y \leq x &\Rightarrow y = k + x \wedge x = k' + y \\ &\Rightarrow y = k + (k' + y) = (k + k') + y \\ &\Rightarrow k + k' = 0 \Rightarrow k = k' = 0 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Exemples d'ordres sur les nombres

Relation de divisiblité $|$ sur $\mathbb{N}$ défini par

$$x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, y = k.x$$

- réflexive : $x = 1.x \Rightarrow x|x$
- transitive :

$$\begin{aligned} x|y \wedge y|z &\Rightarrow y = k.x \wedge z = k'.y \\ &\Rightarrow z = k'.(k.x) = (k.k').x \\ &\Rightarrow x|z \end{aligned}$$

- antisymétrie :

$$\begin{aligned} x|y \wedge y|x &\Rightarrow y = k.x \wedge x = k'.y \\ &\Rightarrow y = k.(k'.y) = (k.k').y \end{aligned}$$

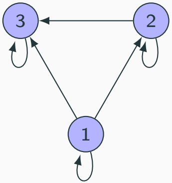
  Si $y = 0$, on a $x = k'y = 0 \Rightarrow x = y$
  Sinon, $k.k' = 1 \Rightarrow k = k' = 1 \Rightarrow x = y$

Exemples d'ordre ordres sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble l'inclusion, notée $\subseteq$, est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ qui n'est pas totale.

- réflexive : on a $A \subseteq A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.
- transitive : si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$.
- antisymétrique : si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $A = B$.

Représentation



	1	2	3
1	V	V	V
2		V	V
3			V

Pour simplifier la lecture du diagramme, on supprime les boucles dues à la réflexivité et les flêches déductibles par transitivité : Diagramme de Hasse

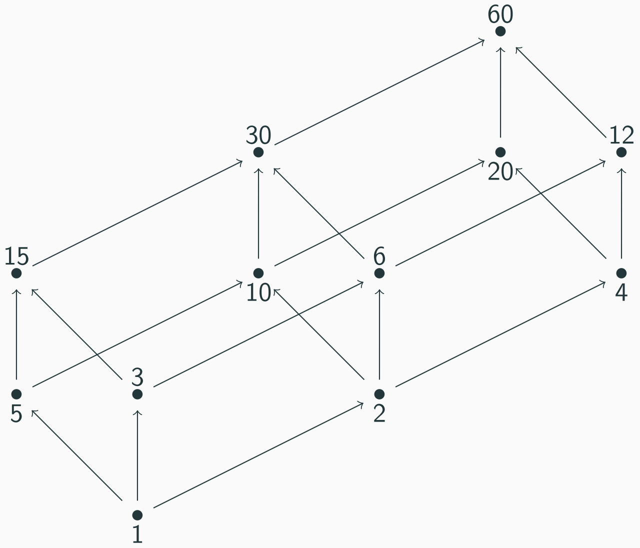
L'idée est de représenter les sommets du diagramme et tracer seulement les fléches correspondant aux successeurs immédiats. On dit que y est un successeur immédiat de x si $x \leq y$, $x \neq y$ et il n'existe pas de z tel que $x \leq z \leq y$.

Exemple sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$ avec $E = \{a, b, c\}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{a, b, c\} & \\
\{a, b\} \arrow[ur] & \{a, c\} \arrow[u] & \{b, c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Relation de divisibilité sur les diviseurs de 60 :

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$



Elément minimal, borne inférieure

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

- $x \in E$ minorant de A si $\forall y \in A$ on a $x \leq y$
- $x \in A$ est minimal de A s'il n'admet pas d'élèment plus petit dans A.
- A admet au plus un seul minorant dans A (par antisymxétrie), c'est le plus petit élèment de A, s'il existe on le note $\min(A)$.
- S'il existe, le plus grand des minorants est la borne inférieure, on la note $\inf(A)$. Autrement dit :

$$\forall y \in A \text{ on a } \inf(A) \leq y \text{ et } \forall z \text{ minorant de } A \text{ on a } z \leq \inf(A)$$

Elément maximal, borne supérieure

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

- $x \in A$ est maximal de A s'il n'admet pas d'élément plus grand dans A.
- $x \in E$ majorant de A si $\forall y \in A$ on a $y \leq x$
- A admet au plus un seul majorant dans A (par antisymétrie), c'est le plus grand élément de A, s'il existe on le note $\max(A)$.
- S'il existe, le plus petit des majorants est la borne supérieure, on la note $\text{sup}(A)$. Autrement dit :

$$\forall y \in A \text{ on a } y \leq \text{sup}(A) \text{ et } \forall z \text{ majorant de } A \text{ on a } \text{sup}(A) \leq z$$

Exemples

$(\mathbb{R}, \leq)$ et $A = [0, 1[$

minorants : $]-\infty, 0]$

majorants : $[1, +\infty[$

plus petit élément : 0

plus grand élément : *aucun*

éléments minimaux : $\{0\}$

élements maximaux : *aucun*

inf : 0

sup : 1

$(\mathcal{P}(E), \subset)$ avec $E = \{1, 2, 3\}$, et $A = \{\{1\}, \{2\}\}$

minorants : $\{\emptyset\}$

majorants : $\{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

plus petit élément : *aucun*

plus grand élément : *aucun*

éléments minimaux : $\{\{1\}, \{2\}\}$

élements maximaux : $\{\{1\}, \{2\}\}$

inf : $\emptyset$

sup : $\{1, 2\}$

Induction

Ordre bien fondé

Définition

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est bien fondé s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E.

De manière équivalente, on a :

Théorème

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide admet au moins un élément minimal.

Exemples

- L'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est bien fondé mais il ne l'est pas sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$.
- L'ordre de divisibilité est bien fondé.

$\mathbb{N}$ et le principe de récurrence

Principe de récurrence

Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$. Si les deux propostions sont vraies

- Initialisation $P(0)$
- Héridité $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.

Preuve : par l'absurde. Supposons la conclusion fausse.

Soit $X = \{n \in \mathbb{N}, \neg P(n)\}$. L'ensemble X est une partie non vide de $\mathbb{N}$, comme $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondé, X admet un élément minimal noté n_0.

Or $0 \notin X$ (car $P(0)$ est vraie) , donc $n_0 > 0$ donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.

Mais $P(n_0 - 1)$ est vraie car $n_0 - 1 \notin X$. Par hypothèse $P(n_0 - 1) \Rightarrow P(n_0)$ donc $P(n_0)$ est vraie ce qui est contradictoire avec $n_0 \in X$.

Exemple : montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(n) : \sum_{i=0}^{i=n} 0 + 1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $P(0) : 0 = \frac{0(1)}{2}$, qui est vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$ $(P(n) \rightarrow P(n+1))$

$$\begin{aligned}\underbrace{0 + 1 + 2 + \ldots + n}_{\frac{n(n+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Ce qui est exactement $P(n+1)$

$\mathbb{N}$ et le principe de récurrence généralisé

Principe de récurrence généralisé

Soit $P(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$. Si les deux propositions sont vraies

- Initialisation $P(0)$
- Hérédité $\forall n \in \mathbb{N}, [\forall k \leq n\, P(k)] \Rightarrow P(n+1)$

Alors pour tout $\forall n, P(n)$ est vraie.

Preuve :

On applique le principe de récurrence du théorème précédent à Q défini par

$$Q(n) : \forall k \leq n \ P(k)$$

Remarque : l'hypothèse de récurrence généralisé peut se résumer à

$$\forall n \in \mathbb{N}, [\ \forall k < n \ P(k)\ ] \Rightarrow P(n)$$

qui se généralise à n'importe quel ordre bien fondé.

Exemple

- On a une tablette de chocolat rectangulaire de taille n (carreaux de chocolats).
- On peut casser cette tablette le long d'une rainure en deux morceaux plus petits, et répeter cette opération jusqu'à obtenir n carreaux de cholocat.
- Montrer qu'il faut $n-1$ cassures, quelque soit la stratégie.

On note $T(n)$: il faut exactement $n-1$ cassures pour casser une tablette de taille n en n morceaux.

$T(1)$ est vraie !

On suppose que $T(1), T(2), \ldots, T(n)$ sont vraies.

Il faut prouver $T(n+1)$.

- On casse la tablette de $n+1$ carreaux en 2 morceaux.
- On note n_1 et n_2 le nombre de carreaux des deux morceaux. On a $n_1 + n_2 = n + 1$.
- Comme $n_1 \leq n$ et $n_2 \leq n$, on sait que $T(n_1)$ et $T(n_2)$ sont vraies.
- Il faut donc $n_1 - 1$ et $n_2 - 1$ cassures pour casser les deux morceaux.
- Ce qui fait au total : $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n$ cassures, donc $T(n+1)$ est vraie.

Remarque : on formalise juste le fait que chaque cassure ajoute un morceau supplémentaire.

Exemple

Tout ensemble de crayons de couleur est monochrome. On montre par récurrence la propriété $P(n)$

"Tout ensemble de n crayons est constitué de crayons ayant la même couleur."

- $P(1)$ est vraie !
- Soit $n > 0$. Supposons $P(n)$, et montrons $P(n+1)$. Soit alors une boîte de $n+1$ crayons, supposés numérotés de 1 à $n+1$.
  - D'après $P(n)$ appliquée aux n premiers, les crayons 1 à n ont la même couleur.
  - D'après $P(n)$ appliquée aux n derniers, les crayons 2 à $n+1$ ont la même couleur.
  - Le crayon 1 a donc la même couleur que les crayons 2 à n, qui ont aussi la même couleur que le crayon $n+1$. Ce qui montre $P(n+1)$.

Où est l'erreur ?

Principe d'induction

Principe d'induction

Soit P un prédicat sur E muni d'un ordre bien fondé $\leq$. Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Initialisation : $P(x)$ est vraie pour tout élèment minimal de E,
- Hérédité : si pour tout $x \in E$ qui n'est pas minimal on a

$$[\ \forall y < x, P(y)\ ] \Rightarrow P(x)$$

Alors $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie.

Preuve : par l'absurde. Soit $X = \{x \in E, \neg P(x)\}$. X est une partie non vide de E, comme $(E, \leq)$ est bien fondé, X admet (au moins) un élèment minimal noté $x_{\mathbf{0}}$.

Comme P est vraie pour tout élèment minimal de E, l'élèment $x_{\mathbf{0}}$ n'est pas minimal dans E.

Pour tout $y \in E$ tel que $y < x_{\mathbf{0}}$, la propriété $P(y)$ est vraie car $x_{\mathbf{0}}$ minimal dans X et donc $y \notin X$. Par hypothèe d'hérédité $P(x_{\mathbf{0}})$ est vraie ce qui est contradictoire avec $x_{\mathbf{0}} \in X$.