# Systèmes linéaires

## R1.07 - Outils mathématiques

monnerat@u-pec.fr

19 novembre 2024

IUT de Fontainebleau

Définitions

Équation linéaire

Système linéaire

Résolution : Gauss

Matrice échelonnée

Algorithme de Gauss

# Définitions

# Définitions

## Équation linéaire

## Équation linéaire

Une équation linéaire est une expression de la forme

$$(E) : a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_n.x_n = b$$

- Les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont appelés coefficients et $b$ second membre.
- $x_1, \ldots, x_n$ sont les inconnues.

**Résoudre l'équation**, c'est trouver **tous les n-uplets** $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

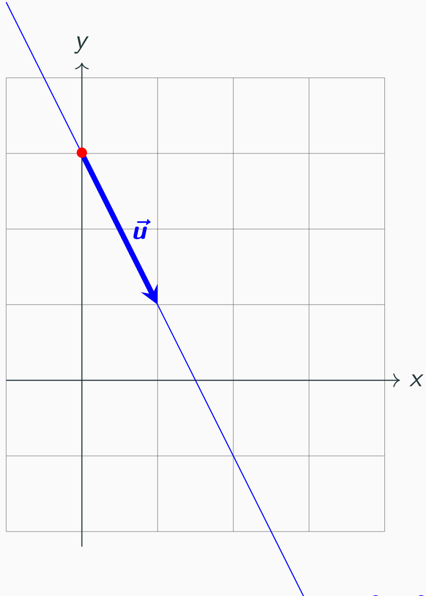
$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_n.x_n = b$$

On notera $Sol_E$ ou simplement $Sol$ l'ensemble des solutions. $Sol_E \subset \mathbb{R}^n$.

Remarque : les n-uplets de $\mathbb{R}^n$ peuvent être vus comme des **matrices lignes/colonnes (des vecteurs)** avec leurs lois de calcul (cf chapitre précédent).

# Exemple

$E : 2x + y = 3$



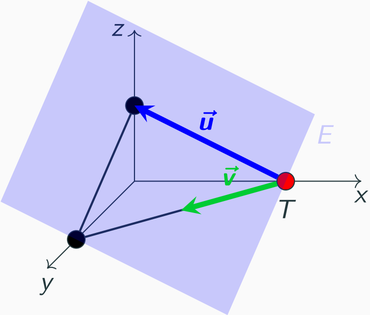

$$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - 2x$$

$$\begin{aligned} Sol &= \{(x, 3-2x),\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= (0,3) + x(1,-2),\ x \in \mathbb{R} \\ &= (0,3) + \mathbb{R}(1,-2) \end{aligned}$$

C'est la droite qui passe par $(0,3)$ dirigée par $(1,-2)$.

# Exemple

$E : x + 2y + z = 2$




$$x + 2y + z = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 2y - z$$

$$\begin{aligned} Sol &= \{(2-2y-z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2,0,0) + y(-2,1,0) + z(-1,0,1) \\ &\quad y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (2,0,0) + \mathbb{R}(-2,1,0) + \mathbb{R}(-1,0,1) \end{aligned}$$

C'est le plan passant par $(2, 0, 0)$
dirigé par les vecteurs $(-2, 1, 0)$
et $(-1, 0, 1)$

# Définitions

## Système linéaire

### Système linéaire

On appelle système linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues un ensemble de $n$ équations linéaires :

$$(S)\left\{\begin{array}{lllllllll} e_1: & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ e_2: & a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ e_n: & a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}.x_j = b_i \\ i = 1, \dots, n \end{array}\right. .$$

- les $x_i$ sont les inconnues.
- Les $a_{ij}$ sont les coefficients, et les $b_i$ le second membre.
- $Sol_S = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{i=n} Sol_{e_i}$

# Notation matricielle

En notant :

- $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice des coefficients.
- $x = (x_i) \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des inconnues.
- $b = (b_i) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des seconds membres.

Le système s'écrit sous forme matricielle :

$$Ax = b$$

Exemple :

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$S \Leftrightarrow Ax = b$$

$(1, 1, 3)$ est une solution.

$(0, 0, 0)$ n'est pas une solution.

Remarques :

- Lorsque $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, le système est dit homogène.
- Deux systèmes sont dit équivalents ssi ils ont les mêmes solutions.

**Théorème**

Un système linéaire possède soit :

- Aucune solution
- Une seule solution
- Une infinité de solution

Preuve : supposons qu'un système $Ax = b$ possède 2 solutions $x_1$ et $x_2$ avec $x_1 \neq x_2$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_\lambda = x_1 + \lambda(x_1 - x_2)$ est une solution. En effet :

$$\begin{aligned} A.[x_1 + \lambda(x_1 - x_2)] &= Ax_1 + \lambda A(x_1 - x_2) \\ &= b + \lambda(Ax_1 - Ax_2) \\ &= b + \lambda(b - b) \\ &= b \end{aligned}$$

Or tous les $y_\lambda$ sont différents (pourquoi ?).

# Résolution : Gauss

# Résolution : Gauss

## Matrice échelonnée

# Système/Matrice échelonnée

Une matrice/système est dite échelonnée si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste que des lignes nulles.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\oplus$ désigne le premier coefficient non nulle de chaque ligne. on l'appelle pivot. Leur nombre s'appelle le rang.

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle n'est échelonnée. Pourquoi ?

# Matrice echelonnée réduite

Une matrice echelonnée est dite sous forme réduite si les pivots valent 1, et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes des pivots sont 1,3,4,7 et 9.

Idée (constat) : un système sous forme échelonné réduit est résolu !

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & & + & 2x_3 & & = & 25 \\ & & x_2 & - & x_3 & & = & 4 \\ & & & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & = & 25 & - & 2x_3 \\ x_2 & = & 4 & + & x_3 \\ x_4 & = & 1 & & \end{array}\right.$$

- Les inconnus correspondants au pivot $x_1, x_2$ et $x_4$ sont les inconnues principales.
- Les autres ($x_3$) sont les inconnues secondaires (les paramètres).
- Les inconnues principales s'expriment à l'aide des paramètres.

$$Sol = \{(25 - 2x_3, 4 + x_3, x_3, 1),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Question : peut-on transformer un système quelconque en un système équivalent échelonné réduit ? Oui !

Méthode du pivot de Gauss !

# Résolution : Gauss

## Algorithme de Gauss

# Opérations élémentaires

Transformations sur les lignes d'un système :

**Transformations**

- $L_i \leftrightarrow L_j$ $(i \neq j)$ : permutations de lignes
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \beta L_j$ $(i \neq j$ et $\lambda \neq 0)$ : combinaison linéaire de lignes

Ces transformations élémentaires transforment un système en un système équivalent !

(Donnez les transformations inverses)

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

Système

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

Système

$$\begin{cases} e_1 : & 5x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ e_2 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_3 : & 2x & - & 7y & + & 2z & = & 1 \end{cases}$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On échelonne

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} e_1: & 5x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ e_2: & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_3: & 2x & - & 7y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \quad e_1 \leftrightarrow e_2$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On échelonne

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2 : & 5x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ e_3 : & 2x & - & 7y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On échelonne

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcrl} e_1: & x & + & y & - & 3z & = & -7 & \\ e_2: & 5x & + & 2y & - & z & = & 4 & e_2 \leftarrow e_2 - 5e_1 \\ e_3: & 2x & - & y & + & 2z & = & 1 & e_3 \leftarrow e_3 - 2e_1 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On échelonne

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} e_1: & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2: & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3: & & - & 9y & + & 8z & = & 15 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On échelonne

Système

$$\left\{\begin{array}{lccccccl} e_1: & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2: & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3: & & - & 9y & + & 8z & = & 15 \quad e_3 \leftarrow e_3 - 3e_2 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

Le système est échelonné, avec $r = 3$ pivots. Il n'y a pas de paramètres.

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2 : & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3 : & & & & - & 34z & = & -102 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcrl} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 & \\ e_2 : & & - & 3y & + & 14z & = & 39 & \\ e_3 : & & & & - & 34z & = & -102 & e_3 \leftarrow -\frac{1}{34} e_3 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} e_1: & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2: & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3: & & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcrl} e_1: & x & + & y & - & 3z & = & -7 & e_1 \leftarrow e_1 + 3e_3 \\ e_2: & & - & 3y & + & 14z & = & 39 & e_2 \leftarrow e_2 - 14e_3 \\ e_3: & & & & + & z & = & 3 & \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lccccccc} e_1 : & x & + & y & & & = & 2 \\ e_2 : & & - & 3y & & & = & -3 \\ e_3 : & & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lrrrrcrl} e_1 : & x & + & y & & = & 2 & \\ e_2 : & & - & 3y & & = & -3 & e_2 \leftarrow -\frac{1}{3}e_2 \\ e_3 : & & & & + \; z & = & 3 & \end{array}\right.$$

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lccccccc} e_1: & x & + & y & & & = & 2 \\ e_2: & & + & y & & & = & 1 \\ e_3: & & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

# Algorithme de Gauss

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lccccccl} e_1 : & x & + & y & & = & 2 & e_1 \leftarrow e_1 - e_2 \\ e_2 : & & + & y & & = & 1 & \\ e_3 : & & & & + \; z & = & 3 & \end{array}\right.$$

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\left\{\begin{array}{lccccccc} e_1: & x & + & & & & = & 1 \\ e_2: & & + & y & & & = & 1 \\ e_3: & & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

**Théorème**

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

$\rightarrow$ On réduit

Système

$$\begin{cases} e_1 : & x & + & & & & = & 1 \\ e_2 : & & + & y & & & = & 1 \\ e_3 : & & & & + & z & = & 3 \end{cases}$$

$$Sol = \{(1, 1, 3)\}$$

Algorithme : échelonnage

1. À la première étape, on se place en haut à gauche (première ligne, première colonne).
2. On cherche dans la colonne un coefficient non nul.

   Si oui : par permutation de ligne, on l'améne en première ligne. Par combinaison avec la première ligne, on annule le reste de la colonne. $\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$. On passe à la ligne et colonne suivante.

   Si non : la colonne est déjà nulle $\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$. On passe à colonne suivante.
3. On boucle en 2 tant que la partie orange n'est pas vide.

Algorithme : réduction

idem, mais à "l'envers".

# Exemple 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & 4z & = & -1 \end{array}\right.$$

# Exemple 1

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 & \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 & l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ -x & + & 3y & + & 4z & = & -1 & l_3 \leftarrow l_3 + l_1 \end{array}\right.$$

# Exemple 1

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & - & 7z & = & -2 \\ & + & y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

# Exemple 1

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & - & 7z & = & -2 \\ & + & y & + & 7z & = & 0 \qquad l_3 \leftarrow l_3 + l_2 \end{array}\right.$$

# Exemple 1

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & - & 7z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & -2 \end{cases}$$

$e_3$ est imcompatible. $Sol = \emptyset$.

# Exemple 2

# Exemple 2

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 7 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 13 \end{array}\right.$$

# Exemple 2

On consigne le système dans un tableau en faisant apparaître uniquement les coefficients et second membre.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right.$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On échelonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c|l} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 & l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 & l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1 \end{array}\right.$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On échelonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right.$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On échelonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right. \; l_3 \leftarrow l_3 - 4l_2$$

# Exemple 2

Le système est échelonné avec $r = 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \; l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \; l_1 \leftarrow 1/3 l_1$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

# Exemple 2

$\rightarrow$ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c|} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$y$ et $z$ sont les paramètres, et

$$Sol = \{(\frac{1}{3}(1 - 4y - z), y, z, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

# Remarques

Soit un système linéaire $n \times p$.

- le système homogène correspondant a toujours au moins une solution (laquelle ?).
- le rang du système $\leq \min(n, p)$.
- le nombre de paramètres $=$ $p$ - rang
- si $n < p$ (système sous-déterminé) avec des solutions. Il y a nécessairement des paramètres. Donc une infinité de solutions.
- si $n > p$ (système sur-determiné). Après échelonnage, on aura nécessairement des équations de compatibilités de la forme $0 = ?$.