

# Calcul matriciel

## R1.07 - Outils mathématiques

---

monnerat@u-pec.fr 

8 novembre 2023

IUT de Fontainebleau

Définition

Opérations

Multiplication par un scalaire

Addition

Produit

Matrices carrées

Matrice inversible

Autres opérations

Transposition

## Définition

# Définition

$\mathbb{K}$  est fixé une fois pour toutes (dans la pratique, il s'agit de  $\mathbb{R}$ ).

## Matrice

On appelle matrice  $n \times p$  un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'élément de  $A$  se trouvant à ligne  $i$  et à la colonne  $j$  (coefficient)

$$a_{ij} \in \mathbb{K}$$

L'ensemble des matrices  $n \times p$  se note

$$M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$A = B$  ssi elles ont les mêmes dimensions **et** les mêmes coefficients.

# Exemples

matrice ligne ( $n = 1$ )

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \in M_{1,4}$$

matrice colonne ( $p = 1$ )

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in M_{3,1}$$

matrice nulle ( $a_{ij} = 0$ )

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{4,3} \in M_{4,3}$$

# Exemples

matrice carrée ( $n = p$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,3}$$

matrice identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \in M_{4,4}$$

matrice triangulaire supérieure ( $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,4}$$

## Exemples

$B \in M_{3,2}$  définie par  $b_{ij} = i + j$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$H \in M_{4,4}$  définie par  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$  (matrice de Hilbert)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

$V \in M_{4,4}$  définie par  $a_{ij} = i^{j-1}$  (matrice de Vandermonde)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$



# Opérations

# Opérations

Multiplication par un scalaire

# Multiplication par un scalaire

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times M_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\rightarrow \lambda.A = (\lambda.a_{ij})\end{aligned}$$

Propriétés : pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$1.A = A$$

$$\lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A$$

$$\lambda A = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0) \vee (A = 0)$$

Exemple :

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \pi & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 3.\pi & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

# Opérations

## Addition

$$\begin{aligned} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- la loi est associative :  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- la loi est commutative :  $A + B = B + A$
- la loi admet un élément neutre :  $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ .
- toute matrice  $A$  admet un symétrique noté  $-A = (-a_{ij})$

$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +)$  groupe commutatif

Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ ,

$$(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$$

$$\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$$

$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

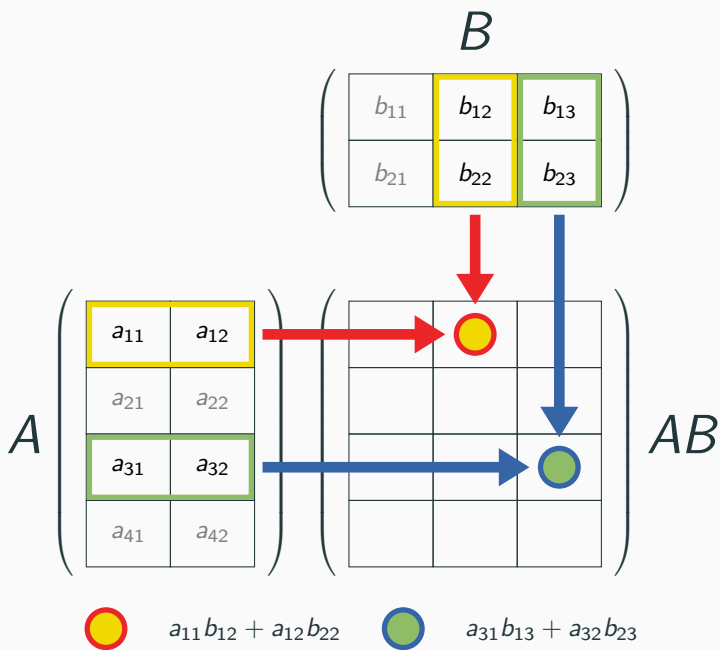
**Opérations**

**Produit**

$$\begin{aligned} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{p,q}(\mathbb{K}) &\rightarrow M_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\rightarrow A.B = \left( \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj} \right) \end{aligned}$$

**Attention** : le nombre de colonne de la première doit être égale au nombre de lignes de la deuxième !





## Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = AB$$

# Propriétés

Pour  $\lambda \in K$ ,  $A \in M_{n,q}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{q,p}(\mathbb{K})$ ,

$$(\lambda A).B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Pour  $\lambda, \mu \in K$ ,  $A, B$  et  $C$  matrices

$$(\lambda A + \mu B).C = \lambda AC + \mu BC$$

$$A.(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

Le produit est associatif

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

Si  $A \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ ,

$$0_{p,n}A = 0_{p,q}, \quad A.0_{q,p} = 0_{n,p}, \quad I_n A = A, \quad A.I_q = A$$

# Matrices carrées

# Algèbre des matrices carrées

Pour les matrices carrées  $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ , le produit matriciel est toujours défini.

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$  est une algèbre

- Par associativité, la puissance nième d'une matrice est bien défini

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n, \quad A^0 = I_n$$

- La matrice identité  $I_n$  est l'élément neutre du produit

$$A \cdot I_n = I_n A = A$$

- Le produit n'est pas commutatif en général.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On n'a pas en général la propriété :

$$A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$$

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc on n'a pas non plus pour  $A \neq 0$  la propriété :

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De même, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour le calcul de  $(A + B)^n$  que lorsque  $A$  et  $B$  commutent, c'est à dire  $AB = BA$ .

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

**Matrices carrées**

**Matrice inversible**



## Inverse

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est inversible s'il est symétrisable pour le produit. Autrement dit, si elle admet un symétrique  $A^{-1}$  qui vérifie

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Rappel : si  $A$  et  $B$  sont inversibles,  $AB$  est inversible, et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Lorsqu'une matrice est inversible, on peut résoudre des équations comme on en a "l'habitude".

Si  $A$  est inversible, alors

$$AB = C \Leftrightarrow B = A^{-1}C$$

Si  $B$  est inversible, alors ??.

**Attention** : toutes les matrices ne sont pas inversibles !

Exemple  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est-elle inversible ?

On cherche  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$$

Solution ?

## Cas particulier de la dimension 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice quelconque de taille 2. Alors

- si  $ad - bc = 0$ ,  $A$  n'est pas inversible.
- si  $ad - bc \neq 0$ ,  $A$  est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Remarque : la nombre  $ad - bc$  s'appelle le déterminant de  $A$ , noté  $\det(A)$ .

(Le déterminant est défini en dimension quelconque, vous verrez ça plus tard)

**Autres opérations**

# Autres opérations

Transposition

# Transposition

L'opération qui consiste à prendre les colonnes d'une matrice pour en faire les lignes d'une nouvelle matrice s'appelle la transposition :

$$\begin{aligned}M_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A = (a_{ij}) &\rightarrow {}^tA = (a_{ji})\end{aligned}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

Propriétés :

- ${}^t(\lambda.A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

Pour une matrice carrée  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on dit que  $sMA$  est symétrique (resp anti-symétrique) si et seulement si  $A = {}^tA$  (resp  $A = -{}^tA$ )

## Décomposition

Toute matrice carrée  $M \in M_n(\mathbb{K})$  est la somme (unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve :

existence :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

unicité : soient 2 décompositions

$$M = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$$

on obtient

$$\underbrace{S_1 - S_2}_{\text{symétrique}} = \underbrace{A_2 - A_1}_{\text{anti-symétrique}}$$

Or la seule matrice à la fois symétrique et anti-symétrique est ???.