

Systemes linéaires

R1.07 - Outils mathématiques

monnerat@u-pec.fr 

21 novembre 2024

IUT de Fontainebleau

Définitions

Équation linéaire

Système linéaire

Résolution : Gauss

Matrice échelonnée

Algorithme de Gauss

Définitions

Définitions

Équation linéaire

Équation linéaire

Une équation linéaire est une expression de la forme

$$(E) : a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

- Les réels a_1, \dots, a_n sont appelés coefficients et b second membre.
- x_1, \dots, x_n sont les inconnues.

Résoudre l'équation, c'est trouver **tous les n-uplets** $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

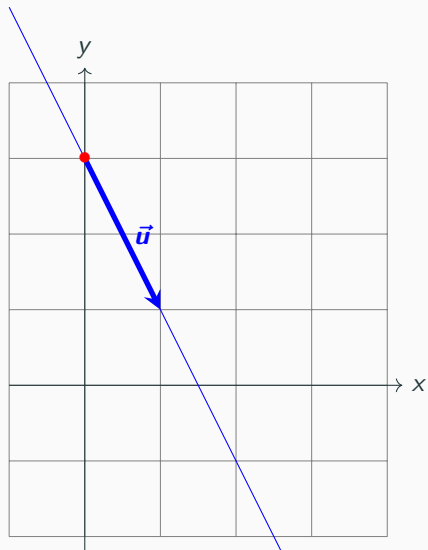
$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

On notera Sol_E ou simplement Sol l'ensemble des solutions. $Sol_E \subset \mathbb{R}^n$.

Remarque : les n-uplets de \mathbb{R}^n peuvent être vus comme des **matrices lignes/colonnes (des vecteurs)** avec leurs lois de calcul (cf chapitre précédent).

Exemple

$$E : 2x + y = 3$$



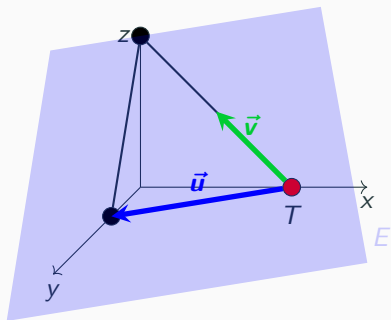
$$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - 2x$$

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \{(x, 3 - 2x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, 3) + x(1, -2), x \in \mathbb{R} \\ &= (0, 3) + \mathbb{R}(1, -2) \end{aligned}$$

C'est la droite qui passe par $(0, 3)$ dirigée par $(1, -2)$.

Exemple

$$E : x + 2y + z = 2$$



$$x + 2y + z = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 2y - z$$

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \{(2 - 2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\ &\quad y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (2, 0, 0) + \mathbb{R}(-2, 1, 0) + \mathbb{R}(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

C'est le plan passant par $(2, 0, 0)$
dirigé par les vecteurs $(-2, 1, 0)$
et $(-1, 0, 1)$

Définitions

Systeme linéaire

Systeme linéaire

On appelle système linéaires de n équations à p inconnues un ensemble de n équations linéaires :

$$(S) \begin{cases} e_1 : a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ e_2 : a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ e_n : a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij} \cdot x_j = b_i \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

- les x_i sont les inconnues.
- Les a_{ij} sont les coefficients, et les b_i le second membre.

- $Sol_S = \bigcap_{i=1}^{i=n} Sol_{e_i}$

En notant :

- $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice des coefficients.
- $x = (x_i) \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des inconnues.
- $b = (b_i) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des seconds membres.

Le système s'écrit sous forme matricielle :

$$Ax = b$$

Exemple :

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$S \Leftrightarrow Ax = b$$

(1, 1, 3) est une solution.

(0, 0, 0) n'est pas une solution.

Remarques :

- Lorsque $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, le système est dit **homogène**.
- Deux systèmes sont dit **équivalents** ssi ils ont les mêmes solutions.

Théorème

Un système linéaire possède soit :

- Aucune solution
- Une seule solution
- Une infinité de solution

Preuve : supposons qu'un système $Ax = b$ possède 2 solutions x_1 et x_2 avec $x_1 \neq x_2$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_\lambda = x_1 + \lambda(x_1 - x_2)$ est une solution. En effet :

$$\begin{aligned}A.[x_1 + \lambda(x_1 - x_2)] &= Ax_1 + \lambda A(x_1 - x_2) \\ &= b + \lambda(Ax_1 - Ax_2) \\ &= b + \lambda(b - b) \\ &= b\end{aligned}$$

Or tous les y_λ sont différents (pourquoi?).

Résolution : Gauss

Résolution : Gauss

Matrice échelonnée

Système/Matrice échelonnée

Une matrice/système est dite échelonnée si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste que des lignes nulles.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\oplus désigne le premier coefficient non nulle de chaque ligne. on l'appelle **pivot**. Leur nombre s'appelle le **rang**.

Elle n'est échelonnée.
Pourquoi ?

Matrice échelonnée réduite

Une matrice échelonnée est dite sous forme réduite si les pivots valent 1, et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes des pivots sont 1,3,4,7 et 9.

Idée (constat) : un système sous forme échelonné réduit est résolu !

$$\begin{cases} x_1 + & + 2x_3 & = 25 \\ & x_2 - x_3 & = 4 \\ & & x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 25 - 2x_3 \\ x_2 = 4 + x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

- Les inconnus correspondants au pivot x_1, x_2 et x_4 sont les inconnues principales.
- Les autres (x_3) sont les inconnues secondaires (les paramètres).
- Les inconnues principales s'expriment à l'aide des paramètres.

$$\text{Sol} = \{(25 - 2x_3, 4 + x_3, x_3, 1), x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Question : peut-on transformer un système quelconque en un système équivalent échelonné réduit ? Oui !

Méthode du pivot de **Gauss** !

Résolution : Gauss

Algorithme de Gauss

Transformations sur les lignes d'un système :

Transformations

- $L_i \leftrightarrow L_j$ ($i \neq j$) : permutations de lignes
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \beta L_j$ ($i \neq j$ et $\lambda \neq 0$) : combinaison linéaire de lignes

Ces transformations élémentaires transforment un système en un système **équivalent** !

(Donnez les transformations inverses)

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

Systeme

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : 5x + 2y - z = 4 \\ e_2 : x + y - 3z = -7 \\ e_3 : 2x - 7y + 2z = 1 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On échelonne

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : 5x + 2y - z = 4 & e_1 \leftrightarrow e_2 \\ e_2 : x + y - 3z = -7 \\ e_3 : 2x - 7y + 2z = 1 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On échelonne

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2 : & 5x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ e_3 : & 2x & - & 7y & + & 2z & = & 1 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On échelonne

Systeme

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 : x + y - 3z = -7 \\ e_2 : 5x + 2y - z = 4 \quad e_2 \leftarrow e_2 - 5e_1 \\ e_3 : 2x - y + 2z = 1 \quad e_3 \leftarrow e_3 - 2e_1 \end{array} \right.$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On échelonne

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2 : & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3 : & & - & 9y & + & 8z & = & 15 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On échelonne

Systeme

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 : x + y - 3z = -7 \\ e_2 : \quad - 3y + 14z = 39 \\ e_3 : \quad - 9y + 8z = 15 \end{array} \right. \quad e_3 \leftarrow e_3 - 3e_2$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

Le système est échelonné, avec $r = 3$ pivots. Il n'y a pas de paramètres.

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2 : & & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3 : & & & & & - & 34z & = & -102 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : x + y - 3z = -7 \\ e_2 : -3y + 14z = 39 \\ e_3 : -34z = -102 \end{cases} \quad e_3 \leftarrow -\frac{1}{34}e_3$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : & x & + & y & - & 3z & = & -7 \\ e_2 : & & & - & 3y & + & 14z & = & 39 \\ e_3 : & & & & & + & z & = & 3 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 : x + y - 3z = -7 \\ e_2 : \quad - 3y + 14z = 39 \\ e_3 : \quad \quad + z = 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} e_1 \leftarrow e_1 + 3e_3 \\ e_2 \leftarrow e_2 - 14e_3 \end{array}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : x + y & = 2 \\ e_2 : & - 3y & = -3 \\ e_3 : & & + z = 3 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : x + y & = 2 \\ e_2 : & - 3y & = -3 & e_2 \leftarrow -\frac{1}{3}e_2 \\ e_3 : & & + z & = 3 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : x + y & = 2 \\ e_2 : & + y & = 1 \\ e_3 : & & + z = 3 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : x + y & = 2 & e_1 \leftarrow e_1 - e_2 \\ e_2 : & + y & = 1 \\ e_3 : & & + z = 3 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : & x & + & & & = & 1 \\ e_2 : & & & + & y & & = & 1 \\ e_3 : & & & & & + & z & = & 3 \end{cases}$$

Théorème

En un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut échelonner et réduire un système linéaire (ou une matrice).

→ On réduit

Systeme

$$\begin{cases} e_1 : x + & & = 1 \\ e_2 : & + y & = 1 \\ e_3 : & & + z = 3 \end{cases}$$

$$Sol = \{(1, 1, 3)\}$$

Algorithme : échelonnage

1. À la première étape, on se place en haut à gauche (première ligne, première colonne).
2. On cherche dans la colonne un coefficient non nul.

Si oui : par permutation de ligne, on l'amène en première ligne. Par combinaison avec la première ligne, on annule le reste de la colonne.

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}. \text{ On passe à la ligne et colonne suivante.}$$

Si non : la colonne est déjà nulle

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}. \text{ On passe à colonne suivante.}$$

3. On boucle en 2 tant que la partie orange n'est pas vide.

Algorithme : réduction

idem, mais à "l'envers".

Exemple 1

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 3y + 4z = -1 \end{cases}$$

Exemple 1

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 0 & l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ -x + 3y + 4z = -1 & l_3 \leftarrow l_3 + l_1 \end{cases}$$

Exemple 1

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -y - 7z = -2 \\ +y + 7z = 0 \end{cases}$$

Exemple 1

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -y - 7z = -2 \\ +y + 7z = 0 \end{cases} \quad l_3 \leftarrow l_3 + l_2$$

Exemple 1

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -y - 7z = -2 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

e_3 est incompatible. $Sol = \emptyset$.

Exemple 2

Exemple 2

$$(S) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

Exemple 2

On consigne le système dans un tableau en faisant apparaître uniquement les coefficients et second membre.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array} \right]$$

Exemple 2

→ On échelonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1 \end{array}$$

Exemple 2

→ On échelonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

Exemple 2

→ On échelonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] \quad l_3 \leftarrow l_3 - 4l_2$$

Exemple 2

Le système est échelonné avec $r = 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemple 2

→ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2$$

Exemple 2

→ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemple 2

→ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad l_1 \leftarrow 1/3l_1$$

Exemple 2

→ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exemple 2

→ On réduit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

y et z sont les paramètres, et

$$\text{Sol} = \left\{ \left(\frac{1}{3}(1 - 4y - z), y, z, 1 \right) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit un système linéaire $n \times p$.

- le système homogène correspondant a toujours au moins une solution (laquelle?).
- le rang du système $\leq \min(n, p)$.
- le nombre de paramètres = $p - \text{rang}$
- si $n < p$ (système sous-déterminé) avec des solutions. Il y a nécessairement des paramètres. Donc une infinité de solutions.
- si $n > p$ (système sur-déterminé). Après échelonnage, on aura nécessairement des équations de compatibilités de la forme $0 = ?$.