

Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr 

18 septembre 2025

IUT de Fontainebleau

Partie 1

Ensembles

Définitions

Comparaison d'ensembles

Opérations ensemblistes

Définitions

Définition

D'après G.Cantor, on entend par ensemble E : le groupement en un tout d'objets déterminés et bien distincts de notre perception ou de notre entendement, et que l'on appelle les éléments de E .

Exemples :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: entiers relatifs
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$: rationnels
- \mathbb{R} nombres réels, \mathbb{C} nombres complexes, H quaternions

On considère primitives les notions d'appartenance et d'égalité.

- Appartenance : on écrit $x \in E$ si x est un élément de E et $x \notin E$ sinon.
- Egalité : l'écriture $x = y$ signifie que les lettres x et y désignent le même élément. On écrit $x \neq y$ sinon.

Définitions d'ensembles

Définition en extension : on cite tous les éléments, ou seulement quelques-un si le reste se déduit facilement. **L'ordre d'écriture est arbitraire et chaque élément n'y figure qu'une seule fois.**

- $E = \{\} (= \emptyset)$, $E = \{a\}$ singleton, $E = \{a, b\}$ paire.
- $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} (= \llbracket 0, 7 \rrbracket)$.
- $E = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$.

Définition en compréhension : soit E un ensemble. On définit une partie A à l'aide d'une propriété (un prédicat) vérifiée par certains éléments de E . On note :

$$A = \{x \in E \mid p(x)\} = \{x \in E, P(x)\}$$

A est l'ensemble des x appartenant à E tels que $p(x)$ est vrai.

- $E = \mathbb{N}$ et $p(x) : x$ est nombre un pair.
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair}\} = \{0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{N}$
- $E = \mathbb{Z}$ et $p(x) : x^2 = 3x - 2$. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 3x - 2\} = \{1, 2\}$

Comparaison d'ensembles

Ensemble vide : un ensemble ne contenant aucun élément est dit **vide**. Il n'y en a qu'un, noté \emptyset .

$$\forall x, x \notin \emptyset$$

Sous-ensemble : un ensemble A est un sous-ensemble de E si A est composée d'éléments de E . On écrit alors $A \subset E$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

Exemples :

- $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$
- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ mais $a \in \{a, b, c\}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Egalité : deux ensembles E et F sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments . On note $E = F$. On a :

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \wedge F \subset E$$

Attention

Un objet peut être à la fois un élément et une partie d'un ensemble !

Par exemple,

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

et

$$\emptyset \subset \{\emptyset\}$$

Ou encore

$$\{1\} \in \{1, \{1\}\}$$

et

$$\{1\} \subset \{1, \{1\}\}$$

Opérations ensemblistes

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E .

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E .

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

Remarque : on peut **coder** chaque partie par un mot binaire. Chaque bit indique l'appartenance de l'élément correspondant à la position du bit.

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E .

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$P(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

codage = 000 100 010 001 110 101 011 111

Remarque : on peut **coder** chaque partie par un mot binaire. Chaque bit indique l'appartenance de l'élément correspondant à la position du bit.

Opérations ensemblistes

Ensemble des parties

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E .

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E \text{ ou encore } \mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

(On a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$)

Exemple avec $E = \{a, b, c\}$

$$P(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

codage = 000 100 010 001 110 101 011 111

Remarque : on peut **coder** chaque partie par un mot binaire. Chaque bit indique l'appartenance de l'élément correspondant à la position du bit.

Corrolaire : si E possède n éléments, $\mathcal{P}(E)$ en possède 2^n .

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Différence :

$$A - B = A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Complémentaire :

$$E \setminus A = \overline{A}^E = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Union :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$$

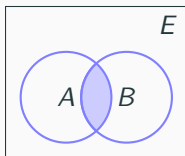
Intersection :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

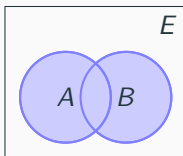
Différence symétrique :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

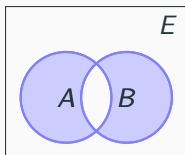
$$A \cap B$$



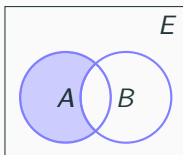
$$A \cup B$$



$$A \Delta B$$



$$A \setminus B$$



$$\overline{A}$$

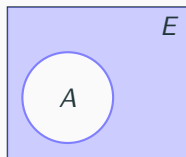
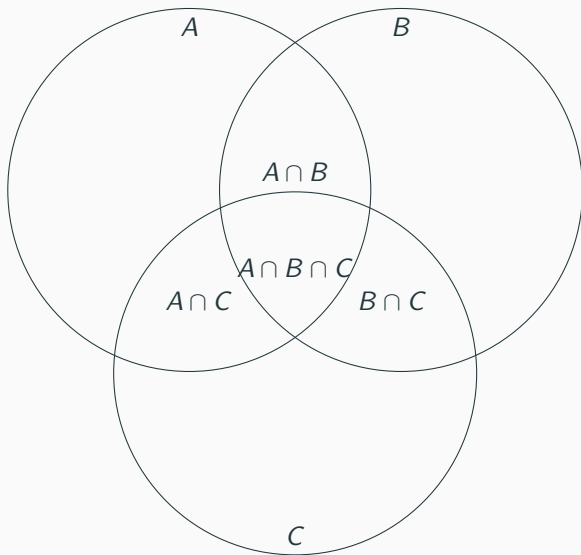


Diagramme de Venn



Propriétés algébriques

Idempotence

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

Commutativité

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Éléments neutre

$$A \cap E = A \quad A \cup \emptyset = A$$

Éléments absorbants

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup E = E$$

Produit cartésien

Définition : Soient E et F deux ensembles. Tous les couples ordonnés (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$ constituent un ensemble appelé produit cartésien de E et F . On le note $E \times F$.

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

- Exemple avec $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

- Exemple avec $E = \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$ et $F = \{\diamond, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

$$E \times F = \{(7, \diamond), (8, \diamond), \dots, (A, \diamond), (7, \heartsuit), (8, \heartsuit), \dots, (A, \heartsuit), \\ (7, \clubsuit), (8, \clubsuit), \dots, (A, \clubsuit), (7, \spadesuit), (8, \spadesuit), \dots, (A, \spadesuit)\}$$

Ne pas confondre (x, y) (couple) et $\{x, y\}$ (paire)

Une implantation de la notion de couple à partir de la théorie des ensembles a été proposée notamment par Kuratowski avec

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Remarques :

- Les éléments x et y s'appellent les **composantes** du couple.
- $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

Le produit cartésien se **généralise** à un nombre d'ensembles **quelconque** (même infini !) :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n), e_i \in E_i \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Exemple : pour le système de codage des couleurs RGB (Red, Green, Bleu), une couleur est un élément de

$$[0, 255] \times [0, 255] \times [0, 255] = [0, 255]^3$$

On peut définir des sous-ensembles de couleurs $\{(r, g, b) : g \geq \frac{4}{5}(r + b)\}$