

DS Graphes
1 heure 45 minutes

SUJET n°13

1. **[2 pts]** Combien y a-t-il, à isomorphisme près, de graphes simples non orientés d'ordre 4 ? Dessinez les.
2. **[3 pts]** Soit G un graphe non-orienté simple d'ordre $2p$. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p . Démontrer que ce graphe est connexe. (pas de baratin svp)
3. **[6 pts]** Soit G le graphe sur l'ensemble des sommets $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ donné par la matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Donnez la suite des degrés de G .
 - (b) En partant de 0, donnez l'ordre de parcours en profondeur des sommets (ordre croissant). Dessinez l'arbre de parcours.
 - (c) En partant de 0, donnez l'ordre de parcours en largeur et les distances associées des sommets (ordre croissant). Dessinez l'arbre de parcours.
 - (d) On associe à chaque arête ij de G la valeur $f(ij) = \deg(i) + \deg(j)$. Calculez un arbre couvrant minimal (Donnez la liste des arêtes de l'arbre, ainsi que son poids).
4. **[3 pts]** Cinq étudiants : A, B, C, D , et E doivent passer certains examens parmi les suivants : M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 . Les examens ne se tiennent qu'une seule fois. Chaque étudiant ne peut passer qu'un examen par jour. La liste des inscriptions aux examens est la suivante :

- A : $M_0 M_1 M_2$
- B : $M_1 M_4 M_2$
- C : $M_0 M_2$

- D : $M_4 M_3 M_5$
- E : $M_2 M_5$

Quel est le nombre minimal de jours nécessaires pour faire passer tous les examens ? Proposez un planning. **Justifiez votre réponse à l'aide d'un graphe.**

5. **[4 pts]** Soit le graphe orienté valué positivement défini par

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	2	15	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	0	∞	7	∞	15	6	∞	∞	∞
C	1	∞	0	11	10	11	∞	4	∞	∞
D	13	∞	∞	0	12	13	∞	∞	12	∞
E	12	∞	4	9	0	∞	1	∞	13	∞
F	∞	∞	∞	∞	10	0	∞	3	4	∞
G	13	1	∞	6	6	14	0	∞	3	3
H	5	14	∞	6	9	3	∞	0	11	8
I	10	13	∞	∞	5	∞	14	13	0	1
J	∞	3	13	1	15	3	12	∞	14	0

Calculez un chemin de coût minimal du sommet A vers tous les autres sommets du graphe (donnez pour chaque sommet le coût et un chemin).

6. **[4 pts]**

\nearrow	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	6	7	8						
B				5					
C				7	3	2			
D					4				
E						4	5		
F								5	
G								6	7
H									8
I									9

- (a) Dessinez le graphe de flot correspondant au tableau ci-dessus.
- (b) Déterminez la valeur du flot maximal.
- (c) Donnez le nombre total de coupes. Trouvez une coupe minimale.