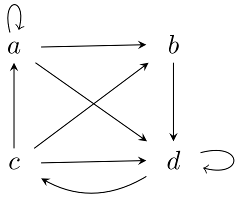
## Relations

1. $\mathcal{R}_1$ définie par




$\mathcal{R}_2$ définie par

| ↱ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | | 1 |
| $b$ | 1 | 1 | | |
| $c$ | 1 | 1 | 1 | |
| $d$ | | | | 1 |

Les relations suivantes sont-elles réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives ?

2. Sur $E = \{a, b, c\}$, on pose

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$$

   (a) Représentez $\mathcal{R}$ par sa matrice et son diagramme sagittal. Quel est son domaine ? son image ?

   (b) Déterminez si $\mathcal{R}$ réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

   (c) Déterminez $\mathcal{R}^{-1}, \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}, \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}, \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ et leurs propriétés.

3. Soit $E = \{a, b\}$.

   (a) Combien de relations binaires peut-on définir sur $E$ ?

   (b) Donner leurs représentations sagittales, puis leurs propriétés.

4. On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation $R$ par :

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow (a \leq a') \wedge (b \leq b')$$

   (a) Montrer que R est une relation d'ordre.

   (b) Cet ordre est-il total ?

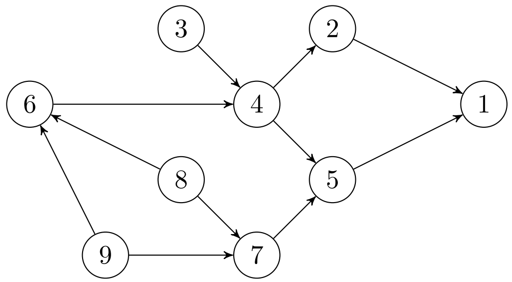
   (c) Soit $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

      i. Établir le diagramme de Hasse de $R$ dans $A$.

      ii. Donner tous les minorants et majorants de $A$.

      iii. A admet-elle un plus grand élément ? un plus petit ? des éléments minimaux ?

5. Soit $R$ la relation d'ordre définie sur $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$ par le diagramme de Hasse suivant :




Pour chaque partie suivante, donner l'ensemble des majorants, minorants, bornes inférieure et supérieure, les plus grand et plus petit élément, les éléments maximaux et minimaux :

   (a) $A = \{3, 6\}$
   (b) $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
   (c) $C = \{4, 5, 7\}$
   (d) $D = \{2, 4, 6, 9\}$

6. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, l'ensemble des diviseurs de 60. Soit la relation d'ordre $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ ssi } x \text{ est multiple de } y$$

   (a) $\mathcal{R}$ est-elle totale ?

   (b) $(E, \mathcal{R})$ a-t'il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

   (c) On pose $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A_2 = \{12, 15\}$ et $A_3 = \{2, 3, 4, 6, 12\}$. Donnez pour chacun d'eux les minorants, majorants, plus petit élément, plus grand élément, borne inférieure, borne supérieure, éléments maximaux, minimaux.

## Raisonnement par récurrence

1. Montrer que, pour tout $n > 0$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$2^{2n} - 1 \quad \text{est divisible par } 3$$

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3$$