Fonctions polynomiales réelles

R1.07 - Outils mathématiques

monnerat@u-pec.fr

19 décembre 2025

IUT de Fontainebleau

Définitions

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée fonction polynomiale (fonction polynôme) s'il existe un entier naturel n est des nombres réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$$

.

Les fonctions polynômes sont des combinaires linéaires des fonctions $x \to x^k$.

Exemples : Les fonctions suivantes sont-elles polynomiales ?

- $x \to \pi x^2 - 3x + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme.
- $x \to (2x-5)^4$ est une une fonction polynôme (pourquoi ?).
- $x \to |x|$? ? on ne sait pas pour l'instant.
- $x \to \cos x$? ? on ne sait pas pour l'instant.

Théorème d'unicité

Soient $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors on a le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Preuve : récurrence sur n.

- $n = 0$. évident.
- on suppose la propriété vraie pour n. Montrons-la pour $n+1$

  Posons $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = p(2x) - 2^{n+1}p(x) = \sum_{i=0}^{i=n}(2^i - 2^{n+1})a_i x^i$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$\forall i \leq n, (2^i - 2^{n+1})a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

  Il vient donc $0 = p(x) = a_{n+1}x^{n+1}$ pour tout x, d'où $a_{n+1} = 0$.

Corollaire

Les coefficients d'une fonction polynôme sont uniques. Plus exactement,

Unicité des coefficents

Pour toute fonction polynôme p non identiquement nulle, il existe un unique entier n et une unique liste $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que

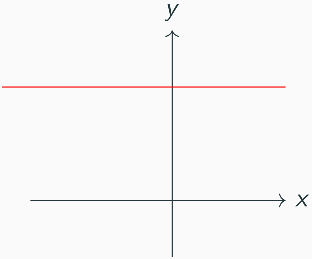
$$a_n \neq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i$$

Avec les notations du corollaire,

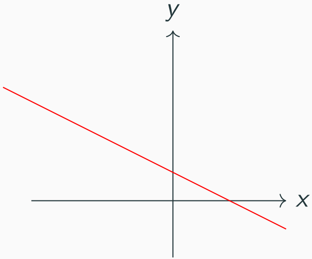
- le degré de p est l'entier n. On le note $\deg p$.
- par convention, le degré de la fonction nulle est $\deg 0 = -\infty$.

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales, et $\mathbb{R}_n[x]$ celles de degré $\leq n$.

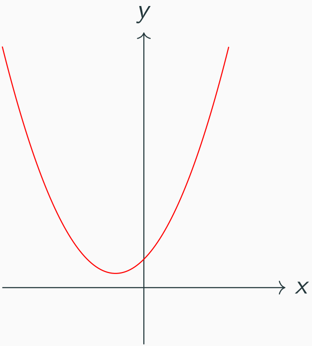
degré 0 : $f(x) = a$



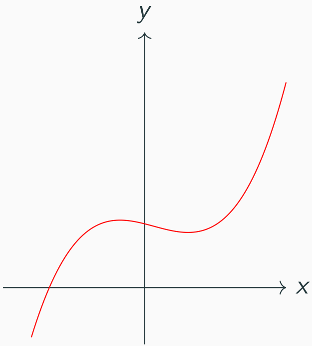
degré 1 : $f(x) = ax + b$



degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$



degré 3 : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Opérations

Algèbre des polynômes

L'ensemble des fonctions polynômes est stable par somme, produit, et produit par une constante.

En particulier, pour p, q polynômes, et a un réel non nul :

- $\deg p + q \leq \max(\deg p, \deg q)$
- $\deg a.p = \deg p$
- $\deg pq = \deg p + \deg q$

C'est encore vrai avec le polynôme nul, en convenant que

$$\max(a, -\infty) = a \text{ et } a + -\infty = -\infty$$

Division euclidienne et racines

Division euclidienne

Théorème

Soient a et b deux polynômes ($b \neq 0$). Alors il existe un unique couple (q, r) de polynômes qui vérifie

$$a = bq + r \text{ et } \deg r < \deg b$$

- q est le quotient, et r le reste de la division euclidienne de a par b.
- Lorsque $r = 0$, on dit que b divise a.

Le plus simple pour la preuve est de donner l'algorithme de division :

Exemple

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\
\cline{3-3}
- & 6x^3 - 6x^2 + 6x & \qquad 6x + 4 \\
\cline{2-2}
 & \phantom{6x^3 - {}} 4x^2 - 5x + 3 & \\
- & \phantom{6x^3 - {}} 4x^2 - 4x + 4 & \\
\cline{2-2}
 & -x - 1 &
\end{array}
$$

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 - x + 1)\underbrace{(6x + 4)}_{\textit{quotient}} + \underbrace{(-x - 1)}_{\textit{reste}}$$

Remarque : on pourrait procéder "à l'envers", en cherchant q et r par résolution d'un système obtenu par identification.

Racine et factorisation

$a \in \mathbb{R}$ est une racine de p si $p(a) = 0$

Factorisation

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. a est racine de p
2. il existe un polynôme q tel que $p = (x - a)q(x)$ ($(x - a)$ divise p)

Preuve : on effectue la division euclidienne de p par $(x - a)$. Il existe donc un polynôme q et un polynôme r tels que

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

avec $\deg r < 1$. C'est donc une constante.

Ainsi, $p(a) = 0 \Leftrightarrow r(a) = 0 \Leftrightarrow r = 0$, d'où le théorème.

Corollaire

Un polynôme p de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes. (récurrence sur n)

Un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.

Dérivation et racines multiples

Dérivée d'un polynôme

Soit $p(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré n. On définit la fonction polynôme dérivée de p le polynôme de degré $n-1$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Remarques :

- C'est une notion purement formelle, même si vous savez qu'elle coïncide avec la dérivée des fonctions en analyse.
- On retrouve les mêmes propriétés, à savoir :
  1. $(p+q)' = p' + q'$
  2. $(\lambda.p)' = \lambda.p'$
  3. $(p.q)' = p'q + pq'$
  4. $p(x) = (x-a)^n \Rightarrow p'(x) = n(x-a)^{n-1}$

Racines Multiples

Soit p une fonction polynomiale. On dit que a est une racine de multiplicité m s'il existe un polynome q tel que

$$p(x) = (x-a)^m q(x) \text{ et } q(a) \neq 0$$

Cela revient à dire que m est la plus grande puissance telle que $(x-a)^m$ divisie p.

Caractérisation avec la dérivée

$$p(a) = p'(a) = \ldots = p^{(n-1)}(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a)^n \text{ divise } p$$

Démonstration

On montre cette équivalence par récurrence.

Pour $n = 1$, théorème déjà vu sur les racines.

On suppose l'équivalence vraie pour n. On va la montrer pour $n+1$.

Sens direct. Soit p tel que $p(a) = \ldots = p^{(n)}(a) = 0$. En effectuant la division euclidienne de p par $(x-a)^{n+1}$, on a

$$p(x) = (x-a)^{n+1} q_1(x) + r(x) \text{ avec } \deg r < n+1$$

D'où

$$p'(x) = (x-a)^n [(n+1) q_1(x) + (x-a) q_1'(x)] + r'(x) \text{ avec } \deg r' < n$$

Or p' vérifie l'hypohése de récurrence au rang n, car $p'(a) = \ldots = p'^{(n-1)}(a) = 0$. Donc $(x-a)^n$ divise $p'(x)$.

On en déduit que $r' = 0$, et donc r est constant. Comme a est racine de p, a est racine de r, donc $r = 0$

Sens réciproque. On suppose que $(x-a)^{n+1}$ divise p.
$p(x) = (x-a)^{n+1} q(x)$

En dérivant, on obtient facilement que $(x-a)^n$ divise $p'(x)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$p'(a) = \ldots = p'^{(n-1)}(a) = 0$$

ce qu'on réécrit

$$p'(a) = \ldots = p^{(n)}(a) = 0$$

Et comme $(x-a)^{n+1}$ divise p, on a aussi $p(a) = 0$, ce qui achève la récurrence.

Formule de Taylor

Soit p un polynôme. On a la formule de Taylor en un point $a \in \mathbb{R}$ quelconque

$$\forall x, p(x) = \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Preuve : on forme q la différence

$$q(x) = p(x) - \sum_{k=0}^{\deg p} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

qui est un polynôme de degré au plus celui de p.

En dérivant un nombre de fois quelconque (Faites-le), on a

$$\forall i, q^{(i)}(a) = 0$$

q est donc nul d'après le théorème précédent.

Exemple

Soit $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 10$.

La formule de taylor au point 1 donne :

- $p(1) = -5$
- $p'(x) = 12x^2 - 4x + 3$, $p'(1) = 11$
- $p^{(2)}(x) = 24x - 4$, $p^{(2)}(1) = 20$
- $p^{(3)}(x) = 24$, $p^{(3)}(1) = 24$

$$\begin{aligned} p(x) &= -5 + 11(x-1) + \frac{20}{2}(x-1)^2 + \frac{24}{6}(x-1)^3 \\ &= -5 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(x-1)^3 \end{aligned}$$

Racines d’une fonction polynôme entière

Théorème

Si $r = \dfrac{b}{c}$ irréductible est une racine du polynôme à coefficents entiers

$$p(x) = sx^n + \ldots + t$$

Alors b divise t et c divise s.

Application : factorisez $p(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

Les racines rationnelles $\dfrac{b}{c}$ possibles

- b diviseur de 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
- c diviseur de 1 : ± 1

Ce qui donne les racines possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
$p(-1) = 1 + 7 + 17 + 17 + 6 = 48$

$p(1) = 1 - 7 + 17 - 17 + 6 = 0$. 1 est racine de p.

Factorisons p par $(x - 1)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,7x^3 & +\,17x^2 & -\,17x & +\,6 & x-1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & +\,x^3 & & & & x^3-6x^2+11x-6 \\ \cline{1-2}
 & -\,6x^3 & +\,17x^2 & & & \\
 & 6x^3 & -\,6x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 11x^2 & -\,17x & & \\
 & & -\,11x^2 & +\,11x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,6x & +\,6 & \\
 & & & 6x & -\,6 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$p(x) = (x-1)(x^3 - 6x^3 + 11x - 6) = (x-1)q(x)$

On recommence sur $q(x)$

On a la même liste de racines possibles. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Ca ne peut pas être -1 (pourquoi ?)

$q(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0.$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -6x^2 & +11x & -6 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2-5x+6 \\ \cline{1-2}
 & -5x^2 & +11x & \multicolumn{1}{r}{} & \\
 & 5x^2 & -5x & \multicolumn{1}{r}{} & \\ \cline{2-3}
 & & 6x & \multicolumn{1}{r}{-6} & \\
 & & -6x & \multicolumn{1}{r}{+6} & \\ \cline{3-4}
 & & & \multicolumn{1}{r}{0} &
\end{array}
$$

$p(x) = (x-1)q(x) = (x-1)^2(x^2-5x+6)$. Il reste à essayer de factoriser x^2-5x+6 qui est de degré 2.

On sait le faire (comment ?)

$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

Finalement

$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$$

1 est une racine double, 2 et 3 sont des racines simples.