

TD n° 3 : Fonctions polynomiales

1. Effectuer la division euclidienne
 - de $x^3 + 2x - 5$ par $x - 1$
 - de $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ par $x^2 - 1$
 - de $(x + 2)^3(x + 1)$ par $(x + 1)^2$
2. Pour tout entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $x^3 - 2x^2 + x$.
3. Soit $p \in \mathbb{R}[x]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de p par $(x - a)$ vaut 1 et que le reste de la division euclidienne par $(x - b)$ vaut -1 , que vaut le reste de la division euclidienne de p par $(x - a)(x - b)$?
4. Trouver les réels a, b tels que $(x - 1)^2$ divise $ax^4 + bx^3 + 1$. Factoriser le polynôme obtenu.
5. Factoriser le polynôme $p(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$
6. a et b étant des nombres réels, déterminer tous les polynômes de la forme $3x^5 + 10x^3 + ax + b$ ayant une racine de multiplicité égal à 3. Factoriser les polynômes obtenus.
7. Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \rightarrow |x|; \quad x \rightarrow \cos x; \quad x \rightarrow e^x; \quad x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$$
8. Soient x_0, \dots, x_n des réels tous distincts, $n \geq 1$. On considère les polynômes

$$p_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$
 - (a) Calculer les valeurs de $p_k(x_i)$?
 - (b) Montrer que la famille $\{p_0, \dots, p_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est à dire que tout polynôme est une combinaison linéaire unique de $\{p_0, \dots, p_n\}$.
 - (c) Construire cette base pour les points $\{1, 2, 3, 4\}$.
 - (d) Décomposer le polynôme $x^2 - 3$ dans cette base.
 - (e) Trouver un polynôme $p(x)$ de degré minimal donné par la table

x	1	2	3	4
$p(x)$	5	6	1	-4