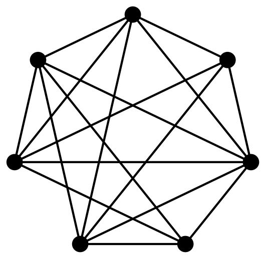
Généralités

1. Combien de graphes simples non orientés distincts peut-on définir sur n sommets donnés ?
2. Combien y a-t-il d'arêtes dans le graphe ci-dessous ?



Conseil : ne pas compter les arêtes mais utiliser une propriété du cours...

3. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes des graphes suivants ?

C_n $\qquad$ P_n $\qquad$ S_n $\qquad$ W_n $\qquad$ K_n $\qquad$ $K_{n,p}$

4. On souhaite démontrer la propriété suivante.

"Dans une assemblée d'un nombre quelconque de personnes, il y a toujours au moins deux personnes qui connaissent le même nombre de personnes."

On admet que l'action de se connaître est réciproque.

On note n le nombre de personnes de l'assemblée, puis on modélise la situation par un graphe.

(a) Indiquer ce que représentent les sommets et les arêtes du graphe. Quel est son ordre ? Est-il orienté ?

(b) Dans cette question, on s'intéresse au cas $n = 3$. Tracer tous les graphes possibles et vérifier que la propriété est vraie.

(c) Soit n quelconque. On raisonne par l'absurde.
Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, puis à aboutir de manière logique à une contradiction, ce qui prouve que la supposition était fausse, et donc que la propriété est vraie.

i. Quelle est ici la supposition ?
ii. Comment cela se traduit-il sur les degrés des sommets ?
iii. Dans un graphe d'ordre n, quelles sont les valeurs possibles des degrés ? Combien cela fait-il de valeurs différentes ?
iv. En reliant les questions **ii** et **iii**, aboutir à une contradiction. Conclure.

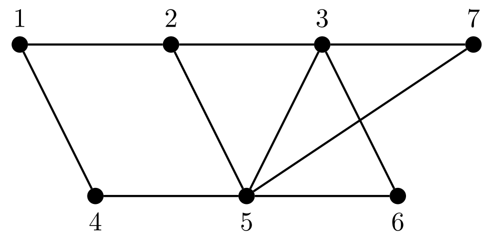
5. Donner un exemple (s'il en existe un) de chacun des graphes suivants :

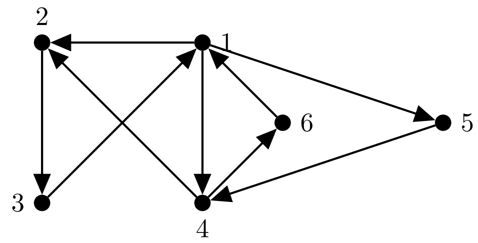
(a) un graphe biparti complet et 5-régulier ;

(b) un graphe 4-régulier autre que K_5 et $K_{4,4}$;

(c) un graphe complet qui est une roue.

6. (a) Donner les matrices d'adjacence des graphes suivants.





Qu'a de particulier la matrice du premier graphe ?

(b) Représenter les graphes dont voici les matrices d'adjacence.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Soit G un graphe d'ordre n, et M sa matrice d'adjacence. Que représente les nombres suivants :

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}$$

(on distinguera les cas orienté et non orienté).

7. Pour chacune des suites indiquées ci-dessous, décider si elle représente la liste des degrés des sommets d'un graphe simple.

   (a) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

   (b) 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1.

   (c) 3, 3, 2, 1, 1.

   (d) 3, 3, 2, 2.

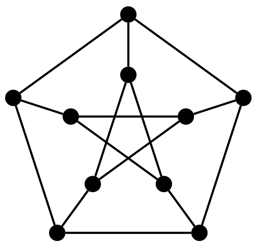
   (e) 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1.

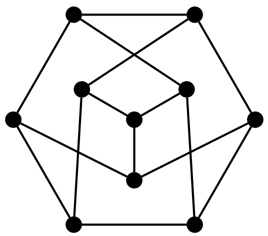
   (f) 4, 2, 1, 1, 1, 1.

   (g) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6.

   (h) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3.

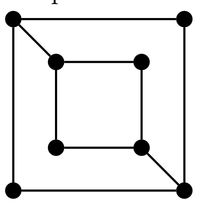
8. (a) Vérifier que les deux graphes ci-dessous sont isomorphes en étiquetant correctement leurs sommets. C'est le **graphe de Petersen**.

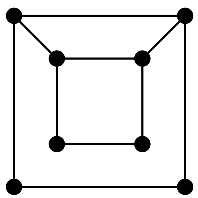




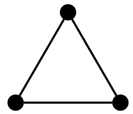
   Ce graphe est-il régulier ? En déduire rapidement son nombre d'arêtes.

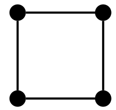
   (b) Expliquer pourquoi les deux graphes ci-dessous ne peuvent pas être isomorphes.

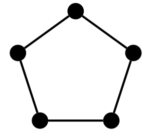


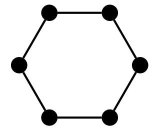


9. Parmi les graphes ci-dessous, lesquels sont des sous-graphes du graphe de Petersen ?









10. Montrer que le nombre de K_3 d'un graphe complet K_n à $n \geq 3$ sommets est égal à $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

11. Soit un graphe (simple) 3-régulier.

   - Que dire du nombre de sommets d'un tel graphe ?
   - Démontrer que, pour tout $p \geq 2$, il existe un graphe 3-régulier d'ordre $2p$.

12. (a) Prouver que $K_{2,p}$ est planaire pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Soit $G = (V, E)$ le graphe défini par

$$V = \{2, 3, 5, 6, 10, 15\} \qquad \text{et} \qquad E = \big\{\{x, y\} \subset V \;\mid\; x \mid y \vee y \mid x\big\} .$$

   Prouver que G est planaire.