Formes normales, calcul propositionnel

1. On considère le connecteur logique $\oplus$ appelé "ou exclusif" :

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Que représente $\neg(p \oplus q)$? Comparer avec $p \oplus \bar{q}$.
Exprimer $\oplus$ à l'aide de $\wedge$, $\vee$ et $\neg$.
Que valent $p \oplus 0$ et $p \oplus 1$? $p \oplus p$?
Montrer que $\oplus$ est commutatif et associatif.
Montrer que $1 \oplus 0 \oplus \ldots = 0$ ssi le nombre des 1 dans la somme est pair.

2. On considère les deux connecteurs $\uparrow$ (NAND) et $\downarrow$ (NOR) suivants :

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Exprimer $\uparrow$ et $\downarrow$ à l'aide de $\neg$ et $\vee$.
Montrer que $\uparrow$ et $\downarrow$, séparément, suffisent à exprimer tous les autres.
Sont-ils commutatifs ? associatifs ?

3.

p	0	0	0	0	1	1	1	1
q	0	0	1	1	0	0	1	1
r	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	1	0	1	1

Donner les formes canoniques disjonctive et conjonctive de la forme f dépendante de 3 variables p, q et r qui a pour table de vérité

4. On cherche à deviner la position d'un certain nombre de bateaux sur une grille de bataille navale à 2 lignes (a et b) et 3 colonnes (1, 2 et 3). On dispose des informations suivantes :

   (a) Il y a au moins un bateau sur la ligne b.

   (b) Il y a au moins un bateau sur la ligne a.

   (c) Il n'y a pas deux bateaux sur une même colonne.

   (d) Il n'y a pas de bateau en (b, 1).

   (e) S'il y a un bateau sur la ligne a, alors il n'y en a pas en (b, 3).

   En notant x_i l'information :

   "il y a un bateau en position (x, i)"

   pour $x \in \{a, b\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, modélisez par une formule du calcul propositionnel les cinq affirmations ci-dessus, simplifiez au maximum la formule obtenue puis dessinez les modèles correspondants.

Raisonnement

1. Soit n un entier. Montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est encore un entier.
   [indication : utiliser un raisonnement par cas]
   Pour les plus motivés, montrer que
   $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
   est encore entier.
2. Montrer que l'équation
   $$x^3 + x - 3 = 0$$
   n'a pas de solution entière.
   [indication : utiliser un raisonnement par l'absurde]
3. Soient a et b deux réels. On considère la proposition

   Si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

   (a) Quelle est la contraposée de cette proposition ?
   (b) Démontrer la proposition ?
   (c) La réciproque est-elle vraie ?
4. Soit n un entier positif. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Pour le plaisir

On appelle **forme normale algébrique** d'une forme propositionnelle l'écriture sous la forme d'un "ou exclusif" de conjonctions (produits) des variables (une conjonction peut-être vide et alors vaut 1). Dans chaque conjonction, on n'écrit pas deux fois la même variable, et dans le "ou exclusif" on n'écrira pas deux fois le même argument.

Par exemple : $1 \oplus p \oplus pq$, $p \oplus q \oplus r \oplus pq \oplus pqr$ (il n'y a pas de négation)

1. Montrer que $\wedge$ est distributif sur $\oplus$, i.e $a \wedge (b \oplus c) \equiv ab \oplus ac$.
2. Exprimer $a \vee b$ à l'aide de $\wedge$ et $\oplus$.
3. En déduire que toute forme propositionnelle admet une forme normale algébrique (on admettra son unicité).
4. Calculer la forme normale algébrique des formes propositionnelles suivantes :
   $$pq \vee \bar{p}r \qquad pqr \vee \overline{pr} \qquad p \to (q \leftrightarrow r)$$