TD n° 1 : Calcul matriciel

1. (a) Écrire les matrices suivantes définies par leur terme général
   - $A = (a_{ij}) \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = (-1)^{i+j}$
   - $B = (b_{ij}) \in M_{3,4}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = j^{i-1}$
   - $C = (c_{ij}) \in M_{4,2}(\mathbb{R})$, $c_{ij} = i - j$

   (b) Parmi les produits suivants, dire lesquels sont définis et donner les dimensions du produit :
   $$A \times A,\ A \times B,\ A \times C, B \times A,\ B \times C, C \times A, C \times B, {}^tC \times C$$

   (c) Quelle est la taille de la matrice $D = A \times B \times C$? donner deux manières différentes de calculer D. En effectuer une. Quelle propriété de la multiplication des matrices met-on en évidence ?

   (d) Quelle est la taille de la matrice $E = {}^t(C \times A)$? Donner deux manières différentes de calculer E. En effectuer une. Quelle propriété de la multiplication des matrices met-on en évidence ?

   (e) Quelle est la taille de la matrice $F = A \times (B + E)$? Calculer de deux manières différentes F. Quelle propriété de la multiplication des matrices met-on en évidence ?

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Calculer $A^2 + 2.A.B + B^2$ et $(A + B)^2$.
   - Conclusion ?

3. Soit la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Calculer M^3.
   En déduire M^{-1}, M^9 et M^{13}.

4. Soit la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer $A^3 - A^2 + 6.A$ et exprimer le résultat en fonction de I_3.

   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de I_3, A, A^2.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) On pose $B = A - I_3$. Calculer B^n pour $n \geq 0$.

   (b) En déduire A^n pour $n \geq 0$.
   on pourra utiliser, en la justifiant, la formule du binôme de Newton

6. On consigne les notes d'un semestre d'IUT dans une matrice M où chaque ligne représente un des 100 étudiants et chaque colonne représente une des 10 matières.

   Trouver une méthode matricielle pour calculer les moyennes semestrielles

   (a) dans chacune des matières.

   (b) de chacun des étudiants. Les coefficients des matières sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}$.

7. Soit à résoudre le problème d'affectation de matrice des coûts :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

   a_{ij} représente le coût d'affectation de l'ouvrier O_i à la tâche T_j.

   (a) Décomposer A en somme de 3 matrices : $A = C + L + R$ où C est colonnes- constantes, L lignes-constantes et R comporte un zéro au moins par rangée.

   (b) Donner un minorant du coût de toute affectation.

   (c) Montrer ensuite que toute affectation où O_3 ne fait pas T_2 coûte au moins 13. Conclure.

8. Soit à résoudre le problème d'affectation de matrice des coûts :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 4 & 13 & 9 & 20 & 10 \\ 3 & 3 & 5 & 22 & 14 \\ 5 & 6 & 11 & 11 & 18 \\ 1 & 9 & 15 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

   Ses coûts représentent des frais de déplacements de 5 inspecteurs vers des chantiers (en ligne k figurent les frais de l'inspecteur I_k vers les chantiers C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5). On veut affecter un inspecteur et un seul à chaque chantier de façon à minimiser la somme des coûts des 5 déplacements.

   (a) Décomposer A en somme de 3 matrices : $A = C + L + R$ dans $M_{5,5}(\mathbb{R}_+)$ où C est colonnes-constantes, L lignes-constantes et R comporte un zéro au moins par rangée.

   (b) Donner un minorant m du coût de toute affectation (m=coût par rapport à $C + L$).

   (c) Quel est le "deuxième minimum" r dans la ligne 5 de R ? Déduire que $(m + r)$ est un minorant du coût de toute affectation où I_5 ne va pas en C_1.

   (d) Si le cinquième inspecteur va en C_1, la sous-matrice correspondante S de R obtenue en éliminant la ligne 5 et la colonne 1 se décompose comme en 1), soit $S = C' + L' + R'$. Préciser. Déduire l'affectation de moindre coût dans ce sous-problème. Conclure.