Introduction à la logique

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

11 juillet 2025

IUT de Fontainebleau

Partie 1

Logique propositionnelle

Sommaire

Introduction

Introduction : la princesse ou le tigre[1]

Un roi organisa des épreuves pour se débarasser de ses prisonniers. Comme il le leur expliqua, chacune des deux cellules contenait un tigre ou une princesse, et toutes les combinaisons étaient possibles. S'ils choisissaient la princesse, ils l'épousaient, mais pour un tigre ...

Le roi amena le prisonnier vers les deux cellules et lui montra les affiches qu'il avait lui-même collées sur les portes :

Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.	*Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule.*

- *"Dois-je faire confiance à ce qui est écrit ?"* questionna le prisonnier.
- *"Une des affiches dit la vérité, et l'autre ment"* promit le roi.

1. Le livre qui rend fou, Raymond Smullyan

Introduction : la princesse ou le tigre [1]

Un roi organisa des épreuves pour se débarasser de ses prisonniers. Comme il le leur expliqua, chacune des deux cellules contenait un tigre ou une princesse, et toutes les combinaisons étaient possibles. S'ils choisissaient la princesse, ils l'épousaient, mais pour un tigre ...

Le roi amena le prisonnier vers les deux cellules et lui montra les affiches qu'il avait lui-même collées sur les portes :

Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.	*Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule.*

- *"Dois-je faire confiance à ce qui est écrit ?"* questionna le prisonnier.
- *"Une des affiches dit la vérité, et l'autre ment"* promit le roi.

A la place du prisonnier, quelle cellule auriez-vous choisie ? (en admettant que votre goût aille aux princesses...)

1. Le livre qui rend fou, Raymond Smullyan

Solution

$p1$	$t2$	$p2$	$t1$	$\neg(p1 \wedge t2) \leftrightarrow ((p1 \wedge t2) \vee (p2 \wedge t1))$
False	*False*	*True*	*True*	*True*
False	*True*	*False*	*True*	*False*
True	*False*	*True*	*False*	*False*
True	*True*	*False*	*False*	*False*

On choisit la cellule 2 !

Remarque : le but du cours d'aujourd'hui est de comprendre cette solution :-)

Langage propositionnel

Langage propositionnel

Proposition

Propositions

Définition naïve

C'est un énoncé simple dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

- 2=5
- Luc Hernandez est plus grand que Denis Monnerat.
- 8 est un nombre premier.
- 16 est inversible dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$.
- La terre est plate.

On interdit les énoncés du type suivant :

- J'espère que Federer va gagner. (souhait)
- Quelle heure est-il ? (question)
- Taisez-vous ! (ordre)
- Je suis un menteur. (énoncé réflexif)

But : modéliser le raisonnement "naturel".

Langage propositionnel

Syntaxe

Formes propositionnelles (fp)

Vocabulaire (alphabet)

- constantes 0 et 1.
- variables propositionnelles : $p, q, r, \ldots$
- connecteurs logiques : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- ponctuation (et).

Langage (syntaxe, grammaire) : définition inductive, récurrence.

- Les symboles 0 et 1 et les variables propositionnelles sont des fp.
- Récurrence : Si P et Q sont des fp, on construit

fp	prononciation	connecteur
$\neg P$	non P	négation
$(P \wedge Q)$	P et Q	conjonction
$(P \vee Q)$	P ou Q	disjonction
$(P \rightarrow Q)$	P implique Q	implication
$(P \leftrightarrow Q)$	P équivalent à Q	équivalence

Théorème

On admet que la construction d'une fp est unique (syntaxe non ambigüe).

Exemple : $((\neg p \to q) \leftrightarrow r)$

1. p est une fp (variable)
2. $\neg p$ est une fp (négation)
3. q est une fp (variable)
4. $(\neg p \to q)$ est une fp (implication)
5. r est une fp (variable)
6. $((\neg p \to q) \leftrightarrow r)$ est une fp (équivalence)

Au contraire, $\neg(\vee p)$ n'est pas une fp.

Langage propositionnel

Notations

Notations

Notation infixée : $((\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow r)$ est la notation usuelle.

Déparenthésage possible en fixant la priorité suivante $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$:

$$\neg p \rightarrow q \leftrightarrow r$$

Notation préfixée : on place les connecteurs avant les arguments

$$\leftrightarrow\ \rightarrow\ \ \neg\ p\ q\ r$$

Notation postfixée : on place les connecteurs après les arguements

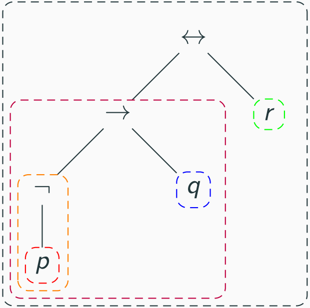
$$p\ \neg\ q\ \ \leftarrow\ \ r\ \ \leftrightarrow$$

Remarque : les notations pré et postfixées n'ont pas besoin des paranthèses.

Notation aborescente

$$(\neg p \to q) \leftrightarrow r$$

Arbre syntaxique



Sous-formules (sous-arbres)

- p
- q
- r
- $\neg p$
- $\neg p \to q$
- $(\neg p \to q) \leftrightarrow r$

Sémantique

Sémantique

Table de vérité

Sémantique

Interprétation

Une interprétation du calcul propositionnel consiste à choisir une valeur de vérité pour toutes les variables propositionnelles.

Valeur de vérité d'une fp pour une interprétation donnée ? On fait le choix suivant :

- 0 est faux et 1 vrai. (on note encore 0 et 1 faux et vrai)
- on fixe (choix arbitraire) la valeur de vérités des connecteurs :

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Remarque : $\neg$ est un connecteur unaire, $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ sont binaires.

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \to p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \to p$	$\neg(p \vee q \to p)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \to p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \to p$	$\neg(p \vee q \to p)$
0	0	0		
0	1			
1	0			
1	1			

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \rightarrow p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$\neg(p \vee q \rightarrow p)$
0	0	0	1	
0	1			
1	0			
1	1			

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \rightarrow p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$\neg(p \vee q \rightarrow p)$
0	0	0	1	0
0	1			
1	0			
1	1			

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \rightarrow p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$\neg(p \vee q \rightarrow p)$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \rightarrow p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$\neg(p \vee q \rightarrow p)$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

- Remarque : pour ne pas oublier d'interprétations, il est conseillé de voir les lignes comme un compteur binaire, initialisé à 0, incrémenté de 1 à chaque ligne.

Table de vérité d'une fp

Définition

Cela consiste à donner, sous forme d'une table, les valeurs de vérités de la fp pour toutes les interprétations possibles.

Exemple : construire la table de vérité de la fp : $\neg(p \vee q \rightarrow p)$

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$	$\neg(p \vee q \rightarrow p)$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

- Remarque : pour ne pas oublier d'interprétations, il est conseillé de voir les lignes comme un compteur binaire, initialisé à 0, incrémenté de 1 à chaque ligne.
- Inconvénient : Le nombre d'interprétations pour n variables est 2^n.

Sémantique

Vocabulaire

Vocabulaire

Un modèle d'une fp est interprétation qui la rend vraie.

Une fp est dite satisfaisable si elle a au moins un modèle.

Une fp qui est toujours vraie quelque soit l'interprétation est une tautologie.

Une fp qui est toujours fausse quelque soit l'interprétation est une contradiction.

Lorsque $A \rightarrow B$ est vraie, on dit que A est une condition suffisante de B, et B est une condition nécessaire de A.

Sémantique

Équivalence logique

Équivalence logique

Pour une même table de vérité, il y a une infinité d'écritures possibles.
Pour 2 variables, il n'y a que 16 tables possibles. (n variables ?)

Équivalence

Deux fp F et G sont dites équivalentes, ce que l'on note $F \equiv G$ ssi elles prennent la même valeur de vérité, quelque soit l'interprétation, autrement dit, si elles ont la même table de vérité.

Exemples

Équivalence logique

Pour une même table de vérité, il y a une infinité d'écritures possibles.
Pour 2 variables, il n'y a que 16 tables possibles. (n variables ?)

Équivalence

Deux fp F et G sont dites équivalentes, ce que l'on note $F \equiv G$ ssi elles prennent la même valeur de vérité, quelque soit l'interprétation, autrement dit, si elles ont la même table de vérité.

Exemples

- $p \to q \equiv \neg p \vee q$. en effet,

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Équivalence logique

Pour une même table de vérité, il y a une infinité d'écritures possibles. Pour 2 variables, il n'y a que 16 tables possibles. (n variables ?)

Équivalence

Deux fp F et G sont dites équivalentes, ce que l'on note $F \equiv G$ ssi elles prennent la même valeur de vérité, quelque soit l'interprétation, autrement dit, si elles ont la même table de vérité.

Exemples

- $p \to q \equiv \neg p \vee q$. en effet,

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

- $p \vee \neg p \equiv 1$, $p \wedge \neg p \equiv 0$.

Sémantique

Calcul

Lois algébriques

- Double négation : $p \equiv \neg\neg p$
- Idempotence : $p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p$
- Commutativité : $p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Associativité : $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- De Morgan : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- Distributivité :
  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Absorption : $p \wedge (p \vee q) \equiv p, \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- Implication : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- Equivalence : $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Eléments neutres : $p \wedge 1 \equiv p$, $p \vee 0 \equiv p$
- Eléments absorbants : $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 1 \equiv 1$

Ces propriétés doivent vous rappeler celles sur le calcul ensembliste.

Sous-formule d'une fp

On appelle sous-formule d'une fp F toute forme propositionnelle intermérdiaire obtenue lors de la construction syntaxique de F.
(sous-arbre de l'arbre syntaxique)

Exemple : $q \vee r$ est une sous-fp de $((p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (r \leftrightarrow p))$.

Substitution (composition)

Cela consiste à remplacer dans une formule toutes les occurences d'une variable par une formule quelconque.

Remplacement

Cela consiste à remplacer dans une formule une sous formule par une formule équivalente.

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$(p \wedge (p \to q)) \to q \quad \equiv$$

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$(p \land (p \to q)) \to q \quad \equiv \quad \neg(p \land (p \to q)) \lor q$$

implication

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$\begin{aligned}(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q &\equiv \neg(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q \\ &\equiv \neg p \vee \neg(p \rightarrow q) \vee q\end{aligned}$$

De morgan

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$\begin{aligned}(p \wedge (p \to q)) \to q &\equiv \neg(p \wedge (p \to q)) \vee q \\ &\equiv \neg p \vee \neg(p \to q) \vee q \\ &\equiv \neg p \vee q \vee \neg(p \to q)\end{aligned}$$

commutativité

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$\begin{aligned}
(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q &\equiv \neg(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee \neg(p \rightarrow q) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee q \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \rightarrow q)
\end{aligned}$$

associativité

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$\begin{aligned}
(p \wedge (p \to q)) \to q &\equiv \neg(p \wedge (p \to q)) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee \neg(p \to q) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee q \vee \neg(p \to q) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \to q) \\
&\equiv (p \to q) \vee \neg(p \to q)
\end{aligned}$$

implication

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$\begin{aligned}
(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q &\equiv \neg(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee \neg(p \rightarrow q) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee q \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv (p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv 1
\end{aligned}$$

$p \vee \neg p \equiv 1$

Théorème

L'équivalence logique entre deux formules est conservée par les deux principes précédents :

- Deux formules équivalentes le sont encore après une substitution.
- On obtient une formule équivalente après un remplacement.

On a donc un moyen algébrique (calculatoire) d'établir l'équivalence de deux formules.

Exemple

$$\begin{aligned}
(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q &\equiv \neg(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee \neg(p \rightarrow q) \vee q \\
&\equiv \neg p \vee q \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv (p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q) \\
&\equiv 1
\end{aligned}$$

Méthodes de preuve

Table de vérité. Il faut évaluer tous les cas.

Calcul algébrique.

Méthode hybride : Quine.

Arbre de Quine

Exemple : soit la fp

$$[(p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

$p = 0$

$$(0 \wedge (0 \rightarrow q)) \rightarrow q \equiv 0 \rightarrow q$$
$$\equiv 1$$

$p = 1$

$$(1 \wedge (1 \rightarrow q)) \rightarrow q \equiv (1 \rightarrow q) \rightarrow q$$

$q = 0$

$$(1 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \equiv 1$$

$q = 1$

$$(1 \rightarrow 1) \rightarrow 1 \equiv 1$$

Remarque : bien que de même complexité théorique que la table de vérité, cette méthode peut s'avérer plus efficace.

Sémantique

Raisonnement

Application aux raisonnements

- **Propriété du tiers exclus** : $p \vee \neg p$ est une tautologie. Elle signifie que pour une propriété donnée, on a uniquement l'alternative : ou bien p est vraie, ou bien p est fausse.
- **Propriété de non-contradiction** : $p \wedge \neg p$ est une contradiction. On ne peut avoir à la fois une propriété vraie et fausse.
- **Raisonnement par déduction** : $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv 1$. Cela signifie que si l'on sait que p est vraie, et que l'implication $p \rightarrow q$ l'est aussi, alors on peut en déduire que q est vraie.
- **Raisonnement par contraposition** : $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$. Montrer l'implication $p \rightarrow q$ est équivalent à montrer l'implication contraposée $\neg q \rightarrow \neg p$.
- **Raisonnement par l'absurde** : $\neg p \rightarrow 0 \equiv p$. Pour démontrer p, on suppose $\neg p$, et on en déduit une contradiction.
- **Raisonnement par cas** : $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \equiv q$

Exemples

Raisonnement par l'absurde

Montrez que le réel 0 n'a pas d'inverse pour la multiplication.

Par l'absurde : on suppose le contraire.

Soit a tel que $a \times 0 = 1$. Ainsi

$$\underbrace{a \times 0}_{1} = a \times (0+0) = \underbrace{a \times 0}_{=1} + \underbrace{a \times 0}_{=1}$$

De sorte que $1 = 2$, ce qui est faux. Donc 0 n'a pas d'inverse. (on aurait pu donner une preuve directe)

Autres exemples classiques démontrables par l'absurde :

- $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.

Exemples

Raisonnement avec le tiers-exclu

Il existe des nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.

On choisit comme assertion p la proposition : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel.

- Ou bien p est vraie, et $a = b = \sqrt{2}$ conviennent.
- Ou bien p est fausse, et alors

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

et alors $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent.

Remarque : cette démonstration n'est pas constructive.

Exemples

Raisonnement par contraposition

Soit n un entier naturel. Si n^2 est pair, alors n est pair

On va montrer la contraposée, i.e

$$\text{Si } n \text{ est impair, alors } n^2 \text{ est impair}$$

Si n est impair, il s'écrit $n = 2k + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\text{Si } n \text{ impair, alors } n^2 \text{ est impair.}$$