Calcul matriciel

R1.07 - Outils mathématiques

monnerat@u-pec.fr

6 novembre 2025

IUT de Fontainebleau

Définition

Défintion

$\mathbb{K}$ corps est fixé une fois pour toutes ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour le binaire).

Matrice

On appelle matrice $n \times p$ un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'élément de A se trouvant à ligne i et à la colonne j (coefficient)

$$a_{ij} \in \mathbb{K}$$

L'ensemble des matrices $n \times p$ se note

$$M_{n,p}(\mathbb{K})$$

$A = B$ ssi elles ont les mêmes dimensions et les mêmes coefficients.

Exemples

matrice ligne ($n = 1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{1,4}$$

matrice colonne ($p = 1$)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in M_{3,1}$$

matrice nulle ($a_{ij} = 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{4,3} \in M_{4,3}$$

Exemples

matrice carrée ($n = p$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,3}$$

matrice identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \in M_{4,4}$$

matrice triangulaire supérieure ($i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,4}$$

Exemples

$B \in M_{3,2}$ définie par $b_{ij} = i + j$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$H \in M_{4,4}$ définie par $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ (matrice de Hilbert)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Exemples

$V \in M_{4,4}$ définie par $a_{ij} = i^{j-1}$ (matrice de Vandermonde)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Opérations

Opérations

Multiplication par un scalaire

Multiplication par un scalaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) & \to & \lambda.A = (\lambda.a_{ij}) \end{array}$$

Propriétés : pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$1.A = A$$

$$\lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A$$

$$\lambda A = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0) \vee (A = 0)$$

Exemple :

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \pi & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 3.\pi & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Opérations

Addition

$$\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \to & A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- la loi est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- la loi est commutative : $A + B = B + A$
- la loi admet un élément neutre : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
- toute matrice A admet un symétrique noté $-A = (-a_{ij})$

$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ groupe commutatif

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$$

$$\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$$

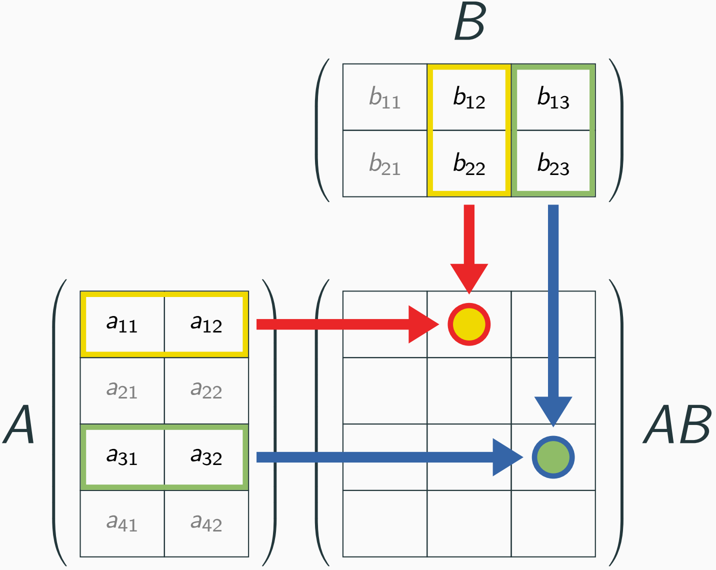
$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Opérations

Produit

$$
\begin{array}{ccc}
M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{p,q}(\mathbb{K}) & \to & M_{n,q}(\mathbb{K}) \\
(A, B) & \to & A.B = (\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj})
\end{array}
$$

Attention : le nombre de colonne de la première doit être égale au nombre de lignes de la deuxième !



$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ $a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = AB$$

Propriétés

Pour $\lambda \in K$, $A \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{q,p}(\mathbb{K})$,

$$(\lambda A).B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Pour $\lambda, \mu \in K$, A,B et C matrices

$$(\lambda A + \mu B).C = \lambda AC + \mu BC$$

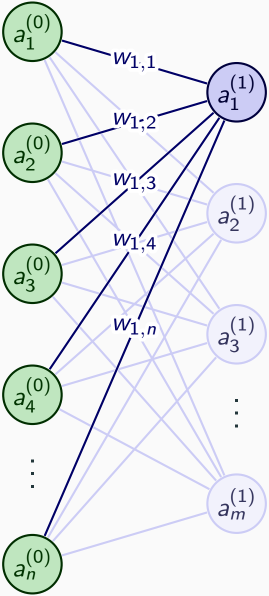
$$A.(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

Le produit est associatif

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

Si $A \in M_{n,q}(\mathbb{K})$,

$$0_{p,n}A = 0_{p,q},\ A.0_{q,p} = 0_{n,p},\ I_nA = A,\ A.I_q = A$$



$$= \sigma\left(w_{1,1}a_1^{(0)} + w_{1,2}a_2^{(0)} + \ldots + w_{1,n}a_n^{(0)} + b_1^{(0)}\right)$$

$$= \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} w_{1,i}a_i^{(0)} + b_1^{(0)}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_m^{(1)} \end{pmatrix} = \sigma\left[\begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \ldots & w_{1,n} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \ldots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m,1} & w_{m,2} & \ldots & w_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ \vdots \\ a_n^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_m^{(0)} \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathrm{a}^{(1)} = \sigma\left(\mathrm{W}^{(0)}\mathrm{a}^{(0)} + \mathrm{b}^{(0)}\right)$$

Matrices carrées

Matrices carrées

Algèbre

Algèbre des matrices carrées

Pour les matrices carrées $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est toujours défini.

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une algèbre

- Par associativé, la puissance nième d'une matrice est bien définié

$$A^n = \underbrace{A.A \dots A}_{n \text{ fois}},\ A^0 = I_n$$

- La matrice identité I_n est l'élément neutre du produit

$$A.I_n = I_n A = A$$

- Le produit n'est pas commutatif en général.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On n'a pas en général la propriété :

$$A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$$

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc on n'a pas non plus pour $A \neq 0$ la propriété :

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

Contre exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De même, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour le calcul de $(A+B)^n$ que lorsque A et B commutent, c'est à dire $AB = BA$.

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

Matrices carrées

Matrice inversible

Inverse

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il est symétrisable pour le produit. Autrement dit, si elle admet un symétrique A^{-1} qui vérifie

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Rappel : si A et B sont inversibles, AB est inversible, et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Lorsqu'une matrice est inversible, on peut résoudre des équations comme on en a "l'habitude".

Si A est inversible, alors

$$AB = C \Leftrightarrow B = A^{-1}C$$

Si B est inversible, alors ??.

Attention : toutes les matrices ne sont pas inversibles !

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

On cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2$$

Solution ?

Cas particulier de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de taille 2. Alors

- si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.
- si $ad - bc \neq 0$, A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Remarque : la nombre $ad - bc$ s'appelle le determinant de A, noté $det(A)$.

(Le déterminant est défini en dimension quelconque, vous verrez ça plus tard)

Autres opérations

Autres opérations

Transposition

Transposition

L'opération qui consiste à prendre les colonnes d'une matrice pour en faire les lignes d'une nouvelle matrice s'appelle la transposition :

$$\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A = (a_{ij}) & \to & {}^tA = A^\intercal = (a_{ji}) \end{array}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

Propriétés :

- ${}^t(\lambda.A) = \lambda\, {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

Pour une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, on dit que A est symétrique (resp anti-symétrique) si et seulement si $A = {}^tA$ (resp $A = -{}^tA$)

Décomposition

Toute matrice carrée $M \in M_n(\mathbb{K})$ est la somme (unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve :

existence :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

unicité : soient 2 décompostions

$$M = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$$

on obtient

$$\underbrace{S_1 - S_2}_{\text{symétrique}} = \underbrace{A_2 - A_1}_{\text{anti-symétrique}}$$

Or la seule matrice à la fois symétrique et anti-symétrique est ???.

Applications

Affectation

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 4 machines à affecter aux tâches T_1, T_2, T_3, T_4. Soient $A = (a_{ij})$ la matrice des coûts d'affectation de M_i à T_j :

	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
$M1$	8	3	1	5
$M2$	11	7	1	6
$M3$	7	8	6	8
$M4$	11	6	4	9

Toute machine M_i doit effectuer une seule tâche $T_{\phi(i)}$.

Problème : Trouver une affectation de coût minimum ie une bijection ϕ de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

Algorithme glouton : on choisit M_i, puis la tâche de moindre coût parmi celles qui restent.

Exemple : $M_1 \to T_3$, $M_2 \to T_4$, $M_3 \to T_1$ et $M_4 \to T_2$. On obtient un coût $1 + 6 + 7 + 6 = 20$. Est-ce minimal ? Combien de cas à énumerer ?

Le coût minimum pour T_1 est 7, pour T_2 3, pour T_3 1, et pour T_4 5. Décomposons la matrice A en une somme d'une matrice colonnes constantes et d'un reste :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On fait de même avec les lignes du reste :

$$A = C + L + R = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le coût d'affectation par rapport à A vaut

$$Cout/A = Cout/C + Cout/L + Cout/R \geq Cout/C + Cout/L = 16 + 3 = 19$$

On a donc une borne inférieure. et même égalité en regardant R.
$M_1 \to T_4, M_2 \to T_3, M_3 \to T_1, M_4 \to T_2$.