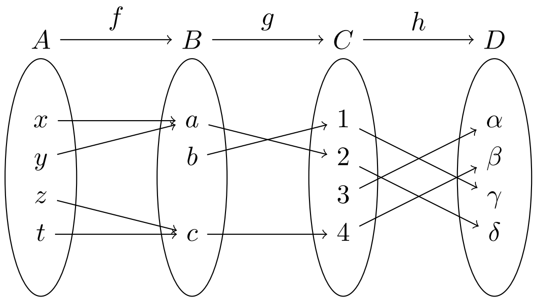
Applications, cardinaux

1. Soient E l'ensemble des étudiants de FI1 et $J = \{jj/mm\}$ l'ensemble des jours de l'année. Soit $f : E \to J$ une application qui associe à chaque étudiant sa date de naissance. On considère les familles de parties suivantes : $\{F, G\}$ (filles et garçons) et $\{Janvier, \ldots, Décembre\}$. Décrire en notations ensemblistes les collections suivantes :
   - les anniversaires des filles ;
   - les étudiants nés en Janvier ;
   - les étudiants nés le même jour qu'une des filles.

2. Soient les trois fonctions f, g, h représentées ci-dessous :



   (a) Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
   (b) Définissez les fonctions composées $k = g \circ f$ et $l = h \circ g$.
   (c) k et l sont-elles injectivres ? surjectives ? bijectives ?

3. Déterminer la nature (in-, sur- ou bijective) des applications suivantes :
   (a) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.
   (b) $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
   (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
   (d) $f : [1, +\infty[\mapsto [-1, +\infty[$, $f(x) = x^2 - 2x$.

   Calculez f^{-1} quand f est bijective.

4. On associe à tout couple (x, y) de $\mathbb{N}^2$ l'entier naturel

$$u = 2^y(2x + 1) - 1$$

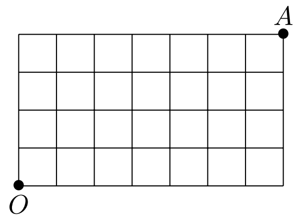
   (a) Pour $x = 5$ et $y = 3$, écrire x et u en base 2.
   (b) Dans le cas général, quelle est l'écriture de u en base 2 ?
   (c) En déduire que l'application qui associe u au couple (x, y) est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

5. Dans une promotion de 109 étudiants en IUT d'informatique, 45 ont déjà codé en Python, 32 en C, 30 ont déjà codé en C++, 13 ont déjà codé en Python et en C++, 6 ont déjà codé en C++ et en C, 14 ont déjà codé en C et en Python et 30 n'ont jamais codé aucun de ces trois langages.
   (a) Combien ont déjà codé en Python, en C et en C++ ?
   (b) Combien ont codé en Python et en C mais pas en C++ ?

6. Sans répétitions, combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$?

   Combien de ces nombres sont :

   (a) inférieurs à 500 ? (b) impairs ? (c) pairs ? (d) multiples de 5 ?

7. 

   Pour aller de O a A, une fourmi se déplace le long d'une grille de $n \times p$ cases (n est la hauteur). Elle va toujours de gauche à droite, et du bas vers le haut. Combien d'itinéraires différents peut-elle emprunter ?

8. Un dimanche matin, un parieur prend 5000 paris différents pour le tiercé de l'après-midi. Que peut-on dire du nombre de chevaux engagés dans la course ?

9. Combien de solutions distinctes l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = n$ possède-t-elle ? (les variables et n sont des entiers naturels)

Pour le plaisir

1. Montrer que pour tout logiciel de compression/décompression il existe des fichiers incompressibles de taille quelconque.

2. Montrer que pour tout ensemble E (fini ou infini), $|E| < |\mathcal{P}(E)|$; c'est-à-dire il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$, mais pas une bijection. *Indication* : pour toute application $f : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ considérer la partie $A = \{x \in E : \; x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$ et montrer que $f^{-1}(A) = \emptyset$.