Ensembles, relations, fonctions

R1.06 - Mathématiques discrètes

monnerat@u-pec.fr

10 octobre 2025

IUT de Fontainebleau

Partie 4

Fonctions

Fonctions, applications

Fonctions, applications

Définitions

Notion de fonction

Fonction

Une fonction $f : E \to F$ (de E dans F) est une relation de $f \subset E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$, on note $y = f(x)$ plutôt que xfy. Attention, f^{-1} (en tant que relation) n'est pas nécessairement une fonction.

Exemple 1

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

On définit la fonction f en extension

$$f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

Autrement dit

$$\begin{array}{cccccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & 1 & \longmapsto & a \\ & & 2 & \longmapsto & c \\ & & 4 & \longmapsto & a \end{array}$$

f^{-1} est-elle une fonction ?

Exemple 2

$h = \{(1, a), (1, c), (4, a)\} \subset E \times F$ n'est pas une fonction. Pourquoi ?

Comment définir une fonction

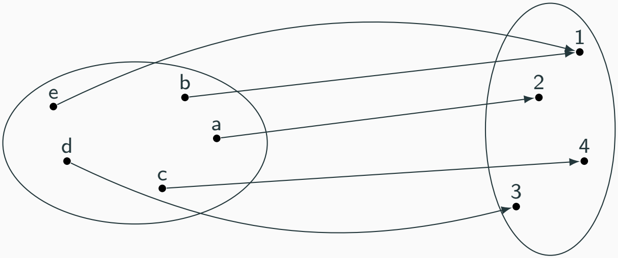
- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

000	␀	(nul)	016	►	(dle)	032	␣	048	0	064	@	080	P	096	‘	112	p
001	☺	(soh)	017	◄	(dc1)	033	!	049	1	065	A	081	Q	097	a	113	q
002	☻	(stx)	018	↕	(dc2)	034	"	050	2	066	B	082	R	098	b	114	r
003	♥	(etx)	019	‼	(dc3)	035	#	051	3	067	C	083	S	099	c	115	s
004	♦	(eot)	020	¶	(dc4)	036	$	052	4	068	D	084	T	100	d	116	t
005	♣	(enq)	021	§	(nak)	037	%	053	5	069	E	085	U	101	e	117	u
006	♠	(ack)	022	▬	(syn)	038	&	054	6	070	F	086	V	102	f	118	v
007	•	(bel)	023	↨	(etb)	039	'	055	7	071	G	087	W	103	g	119	w
008	◘	(bs)	024	↑	(can)	040	(	056	8	072	H	088	X	104	h	120	x
009		(tab)	025	↓	(em)	041	)	057	9	073	I	089	Y	105	i	121	y
010	◙	(lf)	026		(eof)	042	*	058	:	074	J	090	Z	106	j	122	z
011	♂	(vt)	027	←	(esc)	043	+	059	;	075	K	091	[	107	k	123	{
012		(np)	028	∟	(fs)	044	’	060	<	076	L	092	\	108	l	124	|
013	♪	(cr)	029	↔	(gs)	045	-	061	=	077	M	093	]	109	m	125	}
014	♬	(so)	030	▲	(rs)	046	.	062	>	078	N	094	^	110	n	126	~
015	☼	(si)	031	▼	(us)	047	/	063	?	079	O	095	_	111	o	127	⌂

Table 1: Table ascii

Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme



Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

Comment définir une fonction

- Table de valeur
- Diagramme de Venn
- Formule algébrique
- Courbe
- Algorithme

Algorithm 1 Algorithme d'Euclide

procedure $\textsc{Euclide}(a, b)$
  while $b \neq 0$ **do** ▷ We have the answer if b is 0
    $r \leftarrow a \bmod b$
    $a \leftarrow b$
    $b \leftarrow r$
  end while
  return a ▷ The gcd is a
end procedure

Fonctions, applications

Vocabulaires

Ensemble image

Ensemble image

Soit $f : E \to F$ une fonction de E dans F.

- Image : $f(x)$ est l'image de x
- Ensemble image de $A \subset E$: $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A,\ f(x) = y\}$
- Ensemble image de f : $\mathrm{Im}(f) = f(E)$

Exemple :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ défini par

$$f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

On a :

$f(\{1\}) = \{a\}$ $\quad$ $f(\{1, 4\}) = \{a\}$ $\quad$ $f(\{3\}) = \emptyset$ $\quad$ $f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\}$

$\mathrm{Im}(f) = \{a, c\}$

Préimage/image récirpoque

Préimage (image réciproque)

Soit $f : E \to F$ une fonction de E dans F.

- Antécédent : x est un antécedent de y si $y = f(x)$
- Préimage de $B \subset F$: $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$
- Domaine de définition de f : $Dom(f) = f^{-1}(F)$

Exemple :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$ et $f : E \to F$ défini par

$$f = \{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$$

On a :

$$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 4\} \qquad f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 4\} \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \qquad Dom(f) = \{1, 2, 4\}$$

Fonctions, applications

Applications

Application

Application

Une fonction $f : E \to F$ est une application si $Dom(f) = E$. On note

$$F^E$$

l'ensemble des applications de $E \to F$.

Exemple : Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

- $\{(1, a), (2, c), (4, a)\} \subset E \times F$ définit une fonction de E dans F mais pas une application.
- $\{(1, a), (2, c), (3, b), (4, a)\} \subset E \times F$ définit une fonction de E dans F qui est aussi une application.

Remarque : on emploie souvent fonction pour application.

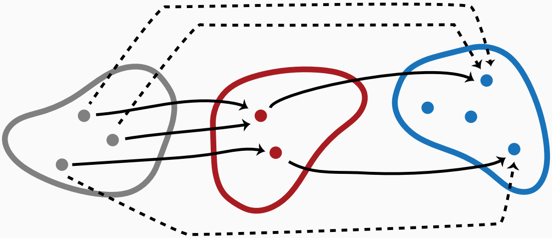
Composition

La fonction composée de $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est la relation

$$g \circ f$$

C'est bien encore une fonction

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}$$



Propriétés

- En général $f \circ g \neq g \circ f$.
- Associativité : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.

Si $f : E \to F$, on a toujours le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle Id_E}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Id_F} \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

C'est à dire

$$Id_F \circ f \circ Id_E = f$$

Injections

Application injective

$f : E \to F$ application est injective si tout $y \in F$ admet au plus un antécédent.

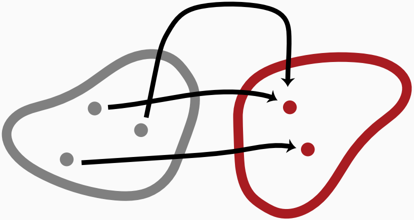
Autrement dit : $\forall x_1, x_2 \in E$ on a $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exemple : Code ASCII, Code INSEE...

Application surjective

$f : E \to F$ application est surjective si tout $y \in F$ admet au moins un antécédent.

Autrement dit : $\mathrm{Im}(f) = f(E) = F$.

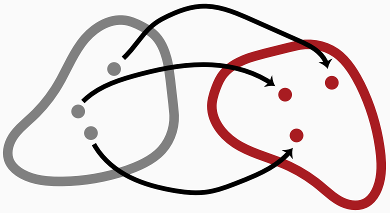


Bijections

Application bijective

$f : E \to F$ application est bijective si tout $y \in F$ admet exactement un antécédent.

Autrement dit : f est une application injective et surjective.



Bijections

Application réciproque

L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Si f est bijective, l'application g est unique, c'est l'application réciproque de l'application f, notée f^{-1}.

C'est l'application obtenue en inversant le "sens des flèches".

Composée de deux bijections

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. La composée $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Fonctions, applications

Quelques classes importantes de fonctions

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble, une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Etant donnée une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on note souvent u_n le $n^{\text{ième}}$ élément de la suite et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Fonctions caractéristiques

Fonctions caractéristiques

Soient $A \subseteq \Omega$ on définit la fonction caractéristique de l'ensemble A par

$$\begin{array}{rrcl} 1_A: & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, pour tout $x \in \Omega$, on a :

- $1_{A\cap B}(x) = 1_A(x) \times 1_B(x)$
- $1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A\cap B}(x)$
- $1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$