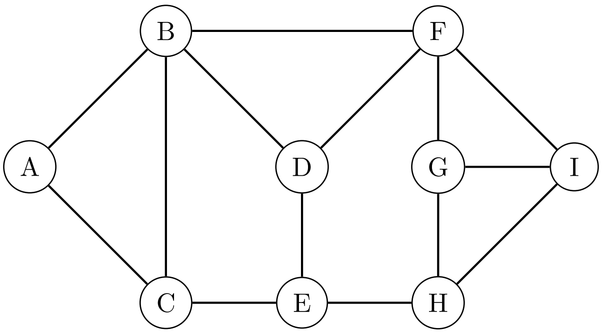
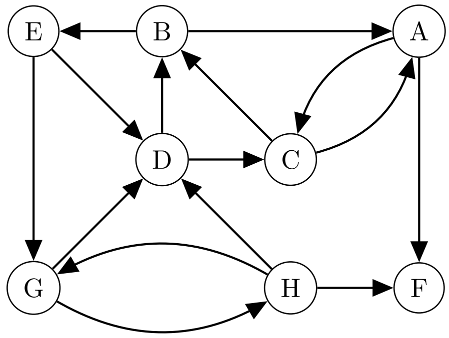
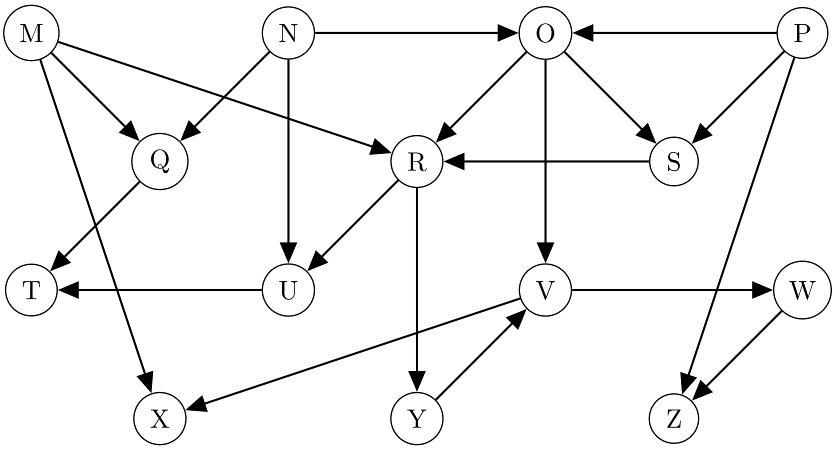
Parcours, coloration et planarité

1. Indiquer un ordre de marquage possible des sommets des graphes suivant lors d'un parcours en largeur, puis en profondeur à partir du sommet D. Tracer l'arbre de parcours correspondant (on explorera les voisins dans l'ordre lexicographique).

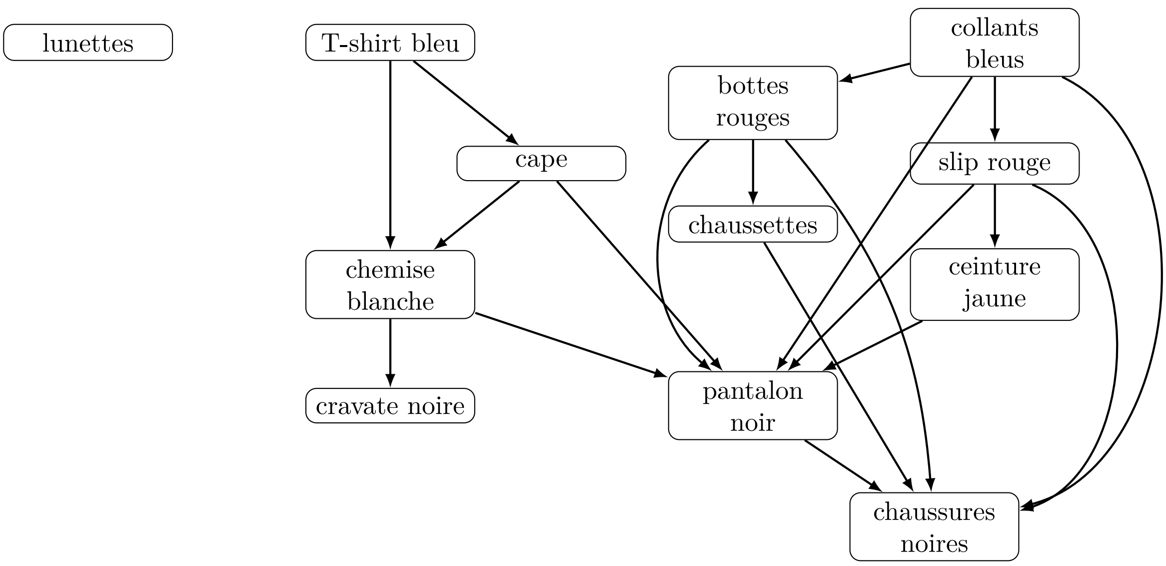




2. En utilisant un parcours en profondeur (ordre lexicographique), effectuer un tri topologique du graphe suivant.



3. Aider Superman à s'habiller en effectuant un tri topologique du graphe suivant.



4. Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées V_1 à V_{10} dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, ...) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés).

Fleur	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			×			×				×
V_2			×	×	×			×		
V_3	×	×		×		×				
V_4		×	×		×			×	×	
V_5		×		×			×	×		
V_6	×		×				×			
V_7					×	×				
V_8		×		×	×					
V_9				×						×
V_{10}	×								×	

(a) Modéliser et représenter la situation par un graphe G.

(b) i. Trouver une 4-clique de G.

ii. Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ?
Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer ?

(c) i. Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.

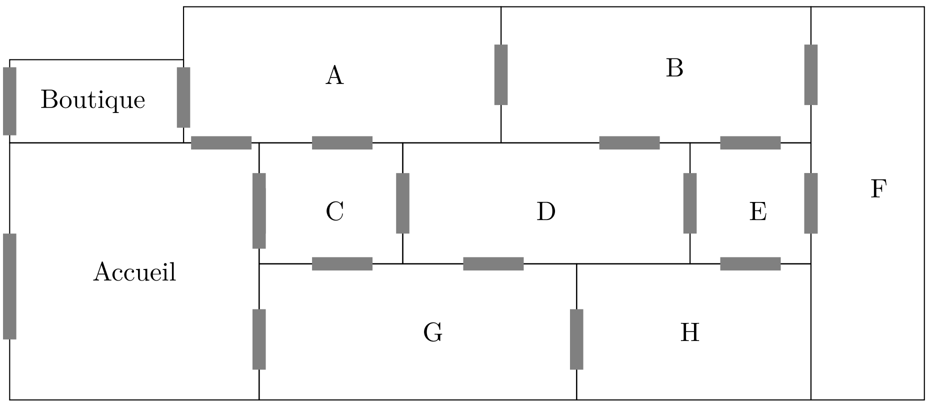
ii. En déduire un encadrement de $\chi(G)$.

(d) i. Appliquer l'algorithme de Welsh-Powell.

ii. Que peut-on en déduire pour le nombre $\chi(G)$?

iii. Proposer un ensemble minimal de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

5. Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite la la boutique.



(a) Modéliser et représenter la situation par un graphe G.

(b) i. Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

ii. Donner un exemple d'un tel circuit.

(c) Démontrer que G est semi-hamiltonien.

(d) i. En regardant les degrés des sommets de G, donner un majorant de $\chi(G)$.

ii. Donner, en justifiant, un meilleur majorant de $\chi(G)$.

iii. Déterminer un minorant de $\chi(G)$.

iv. Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que deux salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le graphe G_n dont les sommets sont les entiers de 1 à n ; deux sommets a et b sont adjacents si et seulement si $a + b$ est un nombre premier. On souhaite déterminer les entiers n pour lesquels G_n est planaire.

(a) Vérifier que G_8 est planaire.

(b) Tracer G_9. Considérons le sous-graphe induit par les sommets $\{2, \ldots, 9\}$.

i. En contractant les arêtes $\{4, 7\}$ et $\{6, 5\}$, quel graphe trouve-t-on ?

ii. Conclure quant à la planarité de G_9.

(c) Répondre à la problématique.

(d) En raisonnant sur la parité des entiers, prouver que $\chi(G_n) = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.