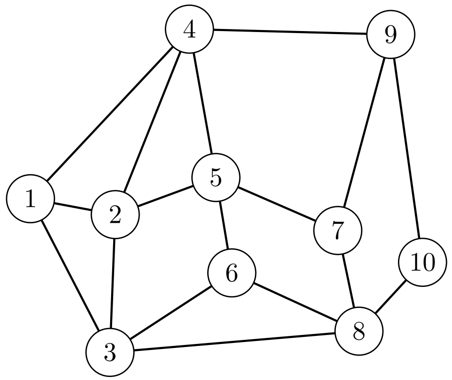
Chemins et connexité

1. Pour chacun des graphes suivants : $P_n \qquad C_n \qquad S_n \qquad W_n \qquad K_n \qquad K_{n,p}$
   (a) déterminer le diamètre ;
   (b) est-il (semi-)eulérien ?
   (c) est-il (semi-)hamiltonien ?

2. Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.

   La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

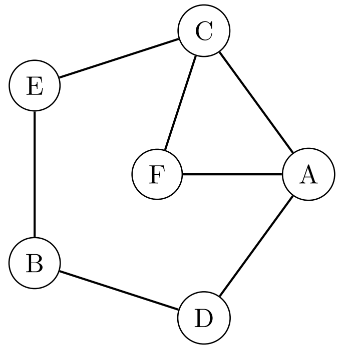


   (a) Donner un itinéraire allant du sommet 1 au sommet 10 passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
   (b) Existe-t-il un itinéraire allant du sommet 1 au sommet 10 utilisant tous les sentiers une seule fois ? Justifier votre réponse.
   (c) On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-contre M^5.
      i. Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
      ii. Déterminer le nombre d'itinéraires allant du sommet 1 au sommet 10 empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le sommet 5.

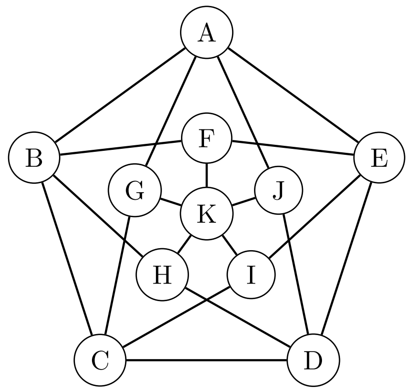
$$M^5 = \begin{pmatrix}
56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\
78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\
75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\
82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\
59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\
57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\
54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\
40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\
26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\
31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2
\end{pmatrix}$$

3. Est-il possible de passer une seule fois par toutes les cases d'un échiquier 4×4 avec un cavalier ? 4×3 ?

4. (a) Le graphe suivant vérifie-t-il les conditions du théorème de Dirac ? d'Ore ? Est-il hamiltonien ?



   (b) Vérifier que le graphe de Grötzsch est hamiltonien.



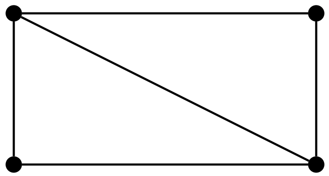
5. Soit G un graphe simple d'ordre n tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Montrer que G est connexe.

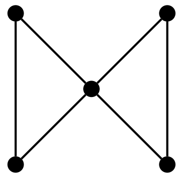
6. Dessiner le graphe associé à la matrice d'adjacence suivante, puis déterminer ses composantes fortement connexes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dessiner tous les arbres à 3, 4 et 5 sommets.

8. Dessiner tous les arbres recouvrants des graphes ci-dessous.





9. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré au moins 2.

   (a) Prouver que $|E| \geq |V|$.

   (b) G peut-il être un arbre ?

   (c) En déduire que G possède un cycle.

10. On considère un pays avec au moins 101 villes et ses liaisons aériennes (aller-retour).
La capitale est reliée à 100 autres villes.
Chaque autre ville, hormis la capitale, propose 10 liaisons aériennes.
On peut se rendre d'une ville quelconque à n'importe quelle autre, quitte à transiter.
On veut prouver que l'on peut fermer au moins la moitié des liaisons avec la capitale tout en gardant le fait de pouvoir se rendre d'une ville à une autre.

    (a) Modéliser la situation par un graphe $G = (V, E)$ en précisant ce que représentent les sommets et les arêtes.

    (b) Comment se traduisent chacune des quatre premières phrases ?

    (c) On considère le sous-graphe G' induit par la suppression de la capitale.

       i. Travaillons dans une composante connexe de G'. Quels degrés trouve t-on ?

       ii. Rappeler pourquoi, dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.

       iii. En déduire le nombre maximum de composantes connexes.

       iv. Conclure.