DS Logique, Ensembles, Applications

1 heure 45 : formulaire A4 recto-verso autorisé
Calculatrices et téléphones portables interdits

SUJET n°01

Rendre le sujet avec votre copie

1. **[3 pts]** Soit f la forme propositionnelle

$$f = ((\neg c \vee \neg a) \oplus (b \to a)) \leftrightarrow (c \wedge \neg b)$$

   (a) Donnez son écriture préfixée.

   (b) Voici sa table de vérité (incomplète):

c	a	b	f
False	False	False	True
False	False	True	False
False	True	False	True
False	True	True	True
True	False	False	False
True	False	True	False
True	True	False	True
True	True	True	

   i. Complétez la dernière ligne de la table.

   ii. Donnez sa forme normale conjonctive.

2. **[3 pts]** Trois personnes a, b, et c peuvent mentir ou dire la vérité :

   - a affirme : si b dit la vérité, alors c aussi
   - b affirme : si c dit la vérité, alors a aussi
   - c affirme : b ment et a dit la vérité

   (a) Représenter l'énoncé par une forme proposionnelle.

   (b) A l'aide d'une table de vérité, dire qui ment et qui dit la vérité.

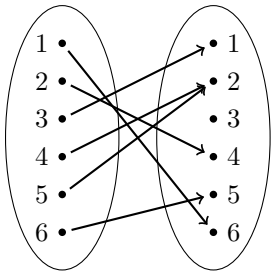
3. **[3 pts]** Dans une promotion de 126 étudiants en IUT d'informatique, 60 ont déjà codé en Python, 58 en C, 63 ont déjà codé en C++, 27 ont déjà codé en Python et en C++, 32 ont déjà codé en C++ et en C, 29 ont déjà codé en C et en Python et 19 n'ont jamais codé aucun de ces trois langages.

   (a) Combien ont déjà codé en Python, en C et en C++ ?

   (b) Combien ont codé en Python et en C++ mais pas en C ?

   (c) Combien ont codé seulement en C++ ?

4. **[4 pts]** Soit l'application $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ définie par



   On pose $A = \{1,2,4\}$

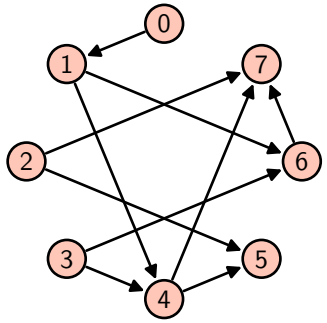
   (a) f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.

   (b) Quelle est l'image de f ?

   (c) Calculez $f(f(A))$?

   (d) Calculez $f^{-1}(f(A))$?

5. **[4 pts]** Soit la relation d'ordre sur l'ensemble $\{0,1,\ldots,7\}$ notée $\preceq$, dont le diagramme de Hasse est ci-dessous



   (a) Donnez l'ensemble des éléments maximaux de $\preceq$.

   (b) Donnez les majorants et les minorants de 1 .

   (c) Donnez l'ensemble des minorants de $\{5,7\}$.

   (d) Donnez la borne supérieure de $\{2,4,6\}$.

6. **[4 pts]** On note, pour $n > 0$,

$$S_n = 1.(1!) + 2.(2!) + 3.(3!) + \ldots + n.(n!)$$

   (a) Complétez le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5
$n!$					
S_n					

   (b) Conjecturez une relation simple entre S_n et $(n+1)!$, puis la démontrer par récurrence.

7. **[bonus]** Une relation binaire R sur un ensemble E est dite circulaire si et seulement si

$$\forall x, \forall y, \forall z, xRy \wedge yRz \to zRx$$

   Soit R une relation. Montrez que R relation d'équivalence $\Leftrightarrow$ R réfléxive et circulaire.